

# Schülerexperimente im Fach Physik

in der Kursphase der gymnasialen Oberstufe  
im LehrplanPLUS des neunjährigen Gymnasiums



# Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

gerade in einer Zeit, in der sich das Leben junger Menschen zu einem nicht geringen Teil in einer virtuellen Welt abspielt, kommt dem eigenen Tun, dem „analogen“ Sehen, Hören und Fühlen, dem unmittelbaren Erleben ein besonderer Stellenwert zu. Deshalb hat dieser Akademiebericht das Prädikat „Besonders wertvoll“ sicherlich verdient.

Mit den bestens aufbereiteten Schülerversuchen für den Physikunterricht in der neuen Oberstufe des Gymnasiums leistet er aktive Unterstützung für die Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsdurchführung. Es ist ein Akademiebericht „von Kollegen für Kollegen“. Fünf Kollegen aus der Unterrichtspraxis haben zusammen mit den beiden Referentinnen für Physik an der ALP bzw. am ISB die Schülerexperimente zusammengestellt. Dafür ein herzliches Dankeschön!

Der Akademiebericht, der als Online-Version über die Homepage der ALP kostenlos zur Verfügung gestellt wird, ist eingebettet in ein innovatives Gesamtkonzept: Neben dem Akademiebericht selbst werden auch Arbeitsblätter, die digital bearbeitbar und unmittelbar im Unterricht einsetzbar sind, bereitgestellt. Als besonders hilfreich dürfte es sich zudem erweisen, dass zu jedem Schülerversuch auch ein passgenauer Film online gestellt ist. Die Produktion dieser Filme erfolgte durch das Filmteam der ALP, dem an dieser Stelle ebenfalls ein herzlicher Dank ausgesprochen sei.

Schülerversuche haben eine hohe Lernwirksamkeit. Der vorliegende Akademiebericht mit seinen Begleitmaterialien kann einen wesentlichen Beitrag dazu leisten, dass Schülerexperimente einen breiten Raum im Physikunterricht der neuen gymnasialen Oberstufe finden. Dies kann gleichermaßen die Attraktivität des Faches erhöhen und zur Verbesserung der Lernergebnisse führen. So bleibt zu hoffen, dass der Akademiebericht gut angenommen und stark rezipiert wird.

Dillingen, den 14.05.2024

Dr. Alfred Kotter

Direktor der Akademie für  
Lehrerfortbildung und Personalführung

# Impressum

## Herausgeber

Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP)  
vertreten durch Herrn Akademiedirektor Dr. Alfred Kotter  
Kardinal-von-Waldburg-Str. 6-7 • 89407 Dillingen a. d. Donau  
Telefon: (0 90 71) 53-0 • Fax: (0 90 71) 53-200  
[alp.dillingen.de](http://alp.dillingen.de) • [akademie@alp.dillingen.de](mailto:akademie@alp.dillingen.de)

## Redaktionsteam

Johannes Almer, Ludwig-Thoma-Gymnasium Prien  
Dr. Kerstin Fehn, Fachreferentin Physik (Gymnasium) am ISB  
München sowie Ohm-Gymnasium Erlangen  
Dr. Johannes Günther, Johann-Schöner-Gymnasium Karlstadt  
Johannes Mann, Meranier-Gymnasium Lichtenfels  
Dr. Christoph Schuller, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium  
Schweinfurt  
Constantin Weiler, Johann-Michael-Sailer-Gymnasium Dillingen

## Redaktionsleitung

Beate Landherr  
OE 2.2  
Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP)

## Redaktionelle Mitarbeit

Christine Lutz  
OE 6.5.2  
Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP)

## Grafikdesign/Layout

Oliver Köhler  
Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP)

## Bildquellen

Titelbild:

<https://stock.adobe.com/de/images/female-scientist-in-a-quantum-optics-lab/29819179>

Versuch 2.2:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Koaxialkabel>,

cc-by-3.0 lizenziert, User Tkgd2007, abgerufen am 24.03.2024

## Literaturverzeichnis

Versuch 2.2:

IQB-Mathematisch-Naturwissenschaftlicher-Formelsammlung  
Stöcker, Taschenbuch der Physik, Frankfurt am Main, 2005,  
S. 554

Versuch 2.3:

Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 2, Berlin, Springer,  
1995, S. 86

Grehn, Krause: Metzler Physik, 5. Auflage, Braunschweig,  
2020, Westermann-Verlag, Abschnitte 6.1.2, 6.1.6 und 6.2.1

Tipler: Physik, Heidelberg, 1995, Spektrum Akademischer  
Verlag, Abschnitt 24.1

Versuch 2.6.1:

<https://www.elektroniktutor.de/analogtechnik/Lgleich.html>

Versuch 2.8:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Feder>, abgerufen am 13.01.2024

Versuch 2.10:

GUM: ISO/BIPM-Leitfaden Guide to the Expression of Uncer-  
tainty in Measurement

Versuch 2.11:

J. Henninger, R. Schwier: Radiometrische Messungen 1 –  
Geiger Müller Zählrohr, TU Dresden, Fakultät Physik, 2022,  
[https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/RM1\\_NP.pdf?lang=de](https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/RM1_NP.pdf?lang=de)  
abgerufen 10.03.2024

## Rechtliche Hinweise

Urheberrecht

Dieses Werk ist in allen seinen Teilen urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte liegen bei der Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung in Dillingen. Die Nutzung dieses Werkes, einschließlich der Dokumente und Filme zum Herunterladen, ist ausschließlich für Unterrichtszwecke auf Papier und in digitaler Form uneingeschränkt gestattet. Darüber hinaus ist die Verwendung von Textauszügen sowie Bild- und Filmmaterial in Veröffentlichungen jeglicher Art nicht gestattet.

Haftungsausschluss

Weder die Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung in Dillingen noch das Redaktionsteam des Akademieberichts übernehmen eine Haftung für direkte oder indirekte Schäden, die durch den exakten oder fehlerhaften Nachbau, die exakte oder fehlerhafte Durchführung oder sonstige Abwandlung der im Akademiebericht beschriebenen Experimente entstehen.

Gefährdungsbeurteilungen

Gefährdungsbeurteilungen sind zum Zeitpunkt der Drucklegung gemäß der „Richtlinie für Sicherheit im Unterricht“ in der Fassung vom 21. September 2023 für jedes Experiment von den Lehrkräften, angepasst an die Ausstattung vor Ort in den Schulen, selbst zu erstellen oder, sofern zum Zeitpunkt der Durchführung eines Experiments Änderungen der vorgenannten Richtlinie erfolgt sind, nach dem dann aktuellen Stand vorzunehmen.

# Inhalt

1. Einführung .....	5
2.1 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Auf oder Entladevorgang beim Kondensator</b> .....	6
2.2 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Kapazitätsmessungen</b> .....	19
2.3 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Messungen mit der Hall-Sonde</b> .....	29
2.4 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Induktion und Selbstinduktion</b> .....	44
2.5 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Mechanische Schwingung</b> .....	66
2.6 Hintergrundinformation zu den Schülerexperimenten <b>Elektromagnetische Schwingung</b> .....	71
2.6.1 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Nachweis der Thomson-Gleichung</b> .....	71
2.6.2 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Erzwungene elektromagnetische Schwingung</b> .....	83
2.7 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Wechselstromkreise</b> .....	89
2.8 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Interferenzversuche mit Licht</b> .....	100
2.9 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Polarisation von Licht</b> .....	115
2.10 Hintergrundinformation zum Schülerexperiment <b>Bestimmung des Planck'schen Wirkungsquantums mit der Gegenfeldmethode</b> .....	130
2.11 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment <b>Absorption und Reichweite von <math>\beta</math>- oder <math>\gamma</math>-Strahlung</b> .....	135

# 1. Einführung

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

seit der Einführung des LehrplanPLUS kommt dem experimentellen und auch eigenverantwortlichen Arbeiten im Physikunterricht eine besondere Bedeutung zu. Insbesondere in der Kursphase der gymnasialen Oberstufe werden nun mit den verpflichtend durchzuführenden Schülerexperimenten neue Wege beschritten. Dazu möchten wir mit dem vorliegenden Akademiebericht Anregungen und Ideen geben. So kann diese Publikation den Physiklehrkräften am Gymnasium helfen, das Praktikum für die Schülerinnen und Schüler einfacher zu gestalten.

Die Experimente wurden von einer erfahrenen Redaktion zusammengestellt. Ein breit aufgestelltes Team stellt sicher, dass die Experimente mehrfach erprobt sind und die Qualität der dargestellten Experimente sehr gut ist. Bitte beachten Sie dazu auch die rechtlichen Hinweise im Impressum.

Noch ein paar Worte zum Aufbau des Akademieberichts:

Bei jedem vorgestellten Experiment geht es nach einer kurzen Einordnung der Kompetenzerwartung des LehrplanPLUS direkt in die Praxis mit der Erläuterung der benötigten Bauteile, dem Aufbau, den notwendigen Messungen und der dazugehörigen Auswertung. Einige Experimente enthalten auch exemplarisch ein Schülerarbeitsblatt.

Von den im LehrplanPLUS genannten möglichen Schülerexperimenten sind zwölf Experimente (siehe Inhaltsverzeichnis) in diesem Akademiebericht ausgearbeitet. Wir weisen auch darauf hin, dass im Lehrplaninformationssystem drei weitere Schülerexperimente (Potentialmessung, Informationsübertragung mit Licht, Aufbau eines Spektrometers) zu finden sind.

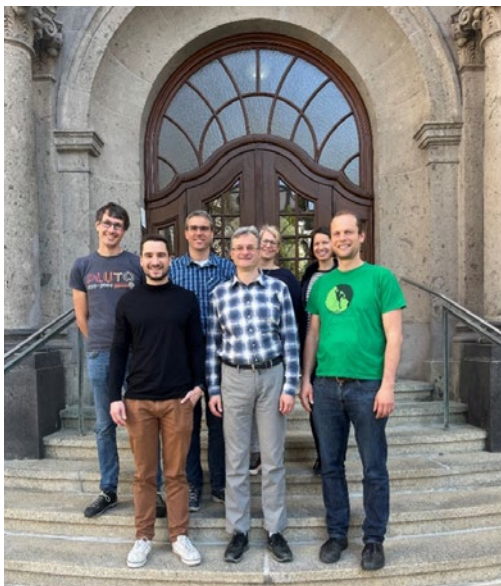
Wir bedanken uns bei allen, die uns unterstützt haben und wünschen erfolgreiche Unterrichtsstunden!

Im Namen des Redaktionsteams

Beate Landherr

OE 2.2 Mathematik und Physik (RS, GYM, BOS)

Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (ALP) Dillingen



Redaktionsteam: Hintere Reihe v. l. n. r.: C. Weiler, Dr. C. Schuller, B. Landherr, Dr. K. Fehn  
Vordere Reihe v. l. n. r.: J. Mann, Dr. J. Günther, J. Almer

## 2.1 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Auf oder Entladevorgang beim Kondensator

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Digitales Messwerterfassungssystem für Stromstärken mit Integrationsfunktion (z. B. Sensor-Cassy 2, PASCO-Stromstärkesensoren)</li> <li>• Verschiedene Kondensatoren von z. B. 10.000 - 100.000 <math>\mu\text{F}</math></li> <li>• Verschiedene Widerstände z. B. 10 <math>\Omega</math> und 20 <math>\Omega</math></li> <li>• Oder: Breadboard, Wechselschalter und Steckverbindungen</li> <li>• Zusammen mit: 10 <math>\mu\text{F}</math> und 100 <math>\mu\text{F}</math> sowie 220 <math>\Omega</math> und 330 <math>\Omega</math></li> </ul>
digitales Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Leifi-Simulation Kurvenverlauf: <a href="https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/kondensator-kapazitaet/grundwissen/ein-und-ausschalten-von-rc-kreisen">https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/kondensator-kapazitaet/grundwissen/ein-und-ausschalten-von-rc-kreisen</a></li> <li>• Qr-Lernhilfen.de .csv Datei zum Abändern der gestuften Hilfen</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 4 Experimentelles Arbeiten

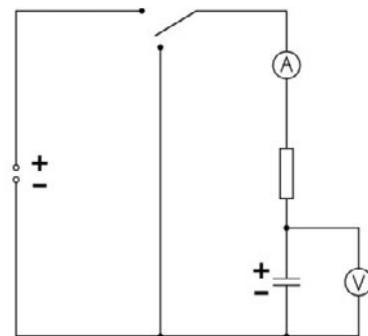
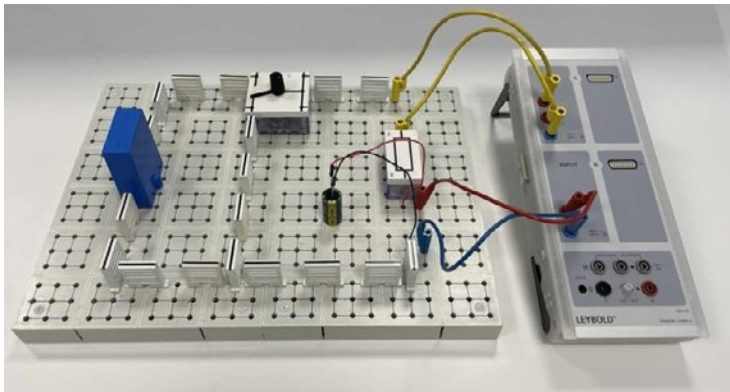
Die Schülerinnen und Schüler planen ein Experiment zur Überprüfung der mathematischen Modellierung des Auf- oder Entladevorgangs eines Kondensators. Sie untersuchen den Einfluss des Ohm'schen Widerstands und der Kapazität auf die Zeitkonstante sowie auf die im Kondensator gespeicherte Ladung. Zum Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit dem Modell nutzen sie digitale Werkzeuge zur Regression und zur graphischen Integration.

### Ziel

Im Rahmen dieses Schülerexperiments werden Kondensatoren verschiedener Kapazitäten über unterschiedliche Widerstände auf- und entladen. Über die digitale Auswertung mittels eines Messwerterfassungssystems sollen Einflüsse auf die Zeitkonstante  $\tau = R \cdot C$  und die Halbwertszeit  $T_{\frac{1}{2}} = \tau \cdot \ln 2$  untersucht sowie mittels graphischer Integration die im Kondensator gespeicherte Ladung gemessen werden. Die vorher durch eine Exponentialfunktion modellierten Zusammenhänge  $I(t) = \frac{|U_0|}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$  und  $U(t) = |U_0| \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$  sollen durch Regression experimentell bestätigt werden.

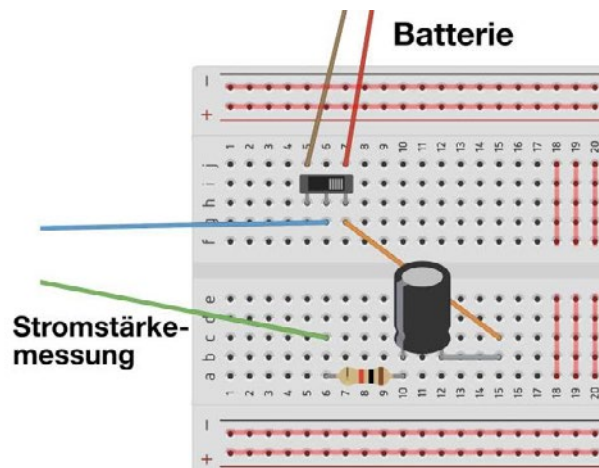
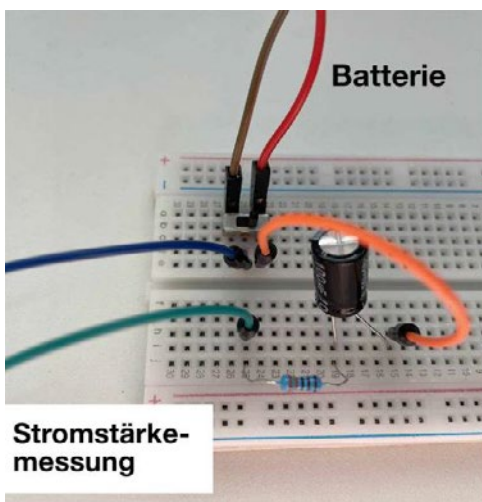
## Aufbau

Der Aufbau kann prinzipiell auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen. Die erste Möglichkeit nutzt die klassischen Steckbretter, wobei als Elektrizitätsquelle eine Batterie genutzt wird. Die Messung der Stromstärke erfolgt direkt vor dem Widerstand (gelbe Kabel). Da die Messung digital und nicht mehr händisch erfolgt, muss die Zeitkonstante nur auf das Messwerterfassungssystem abgestimmt werden. Hier wurden  $C = 10.000 \mu\text{F}$  und  $R = 10 \Omega$  gewählt. Ein größerer Widerstand hätte zwar eine größere Zeitkonstante zur Folge, verringert aber die maximale Stromstärke und damit die Qualität der Ladungsmessung.



**Abb. 1:** Aufbau des RC-Glieds. Der Kondensator wird über Krokodilklemmen in den Schaltkreis integriert. Gelbe Kabel sind für die Messung der Stromstärke und das blaue und rote sind für die Messung der Spannung.

Die zweite Möglichkeit nutzt Breadboards, die das direkte Einstecken bedrahteter Bauteile aus dem Elektronikfachhandel ermöglichen und die es in Sets mit einer großen Auswahl an Widerständen und Kondensatoren gibt. Der Aufbau erfolgt analog, wobei die interne Belegung der Breadboards bekannt sein muss.

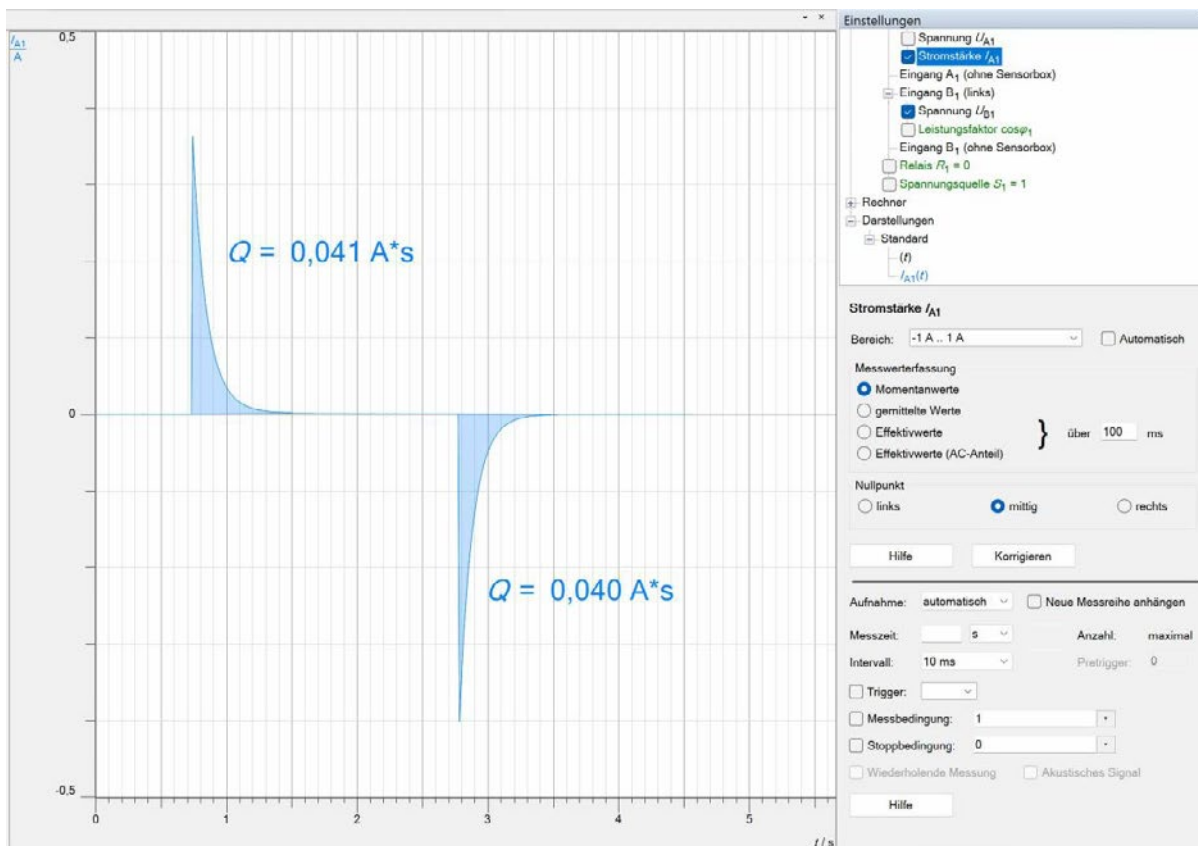


**Abb. 2: Links:** Aufbau des RC-Glieds mit einem Breadboard. Schalterstellung links: Ladevorgang über Batterie, Stromstärkemessung, Widerstand und Kondensator. Schalterstellung rechts: Entladung des Kondensators über orangenes Kabel, Stromstärkemessung und Widerstand. **Rechts:** Beim Schaltplan ist an einigen Stellen die interne Verschaltung des Breadboards rötlich hervorgehoben.

## Durchführung

Bei einer Zeitkonstante von 0,10 s bieten sich Messzeiträume von 10 ms und ein Messbereich von  $-0,50\text{ A}$  bis  $+0,50\text{ A}$  an. Zwei verschiedene Durchgänge des Experiments können zielführend sein:

- Die unterschiedlichen Vorzeichen des Lade- und Entladestroms lassen sich durch zweimaliges manuelles Betätigen des Wechselschalters beobachten, wobei die Messung bei noch geöffnetem Ladestromkreis gestartet wird. Eine graphische Integration der beiden Peaks liefert die betragsmäßig gleiche Ladung  $Q$  (Abb. 3).
- Die Charakterisierung des Stromverlaufs bei unterschiedlichen Kapazitäten sowie Widerständen kann anhand des Ladevorgangs erfolgen. Man nutzt die Triggerfunktion des Messwerterfassungssystems um die Messung automatisch, wenn ein bestimmter Stromstärkewert (hier:  $I = 0,010\text{ A}$ ) überschritten wird, zu starten. Dadurch können die verschiedenen Graphen direkt miteinander verglichen werden und u. a. die Halbwertszeit am Graphen abgelesen werden.



**Abb. 3:** Beim Umlegen des Wechselschalters können die unterschiedlichen Vorzeichen beim Laden und Entladen gut beobachtet werden. Auch bekommen die Schüler ein Gefühl für die Dauer der Vorgänge. Eine graphische Integration liefert die dabei jeweils geflossenen Ladungen.

Zusätzlich zu der gemessenen Stromstärke wird noch die Spannung am Kondensator mit einem einfachen, z. B. analogen Messgerät gemessen. Da sich die Spannung beim Laden erst langsam aufbaut, darf die Messung der Spannung erst nach vollständigem Aufladen des Kondensators erfolgen.

## Messung und Auswertung

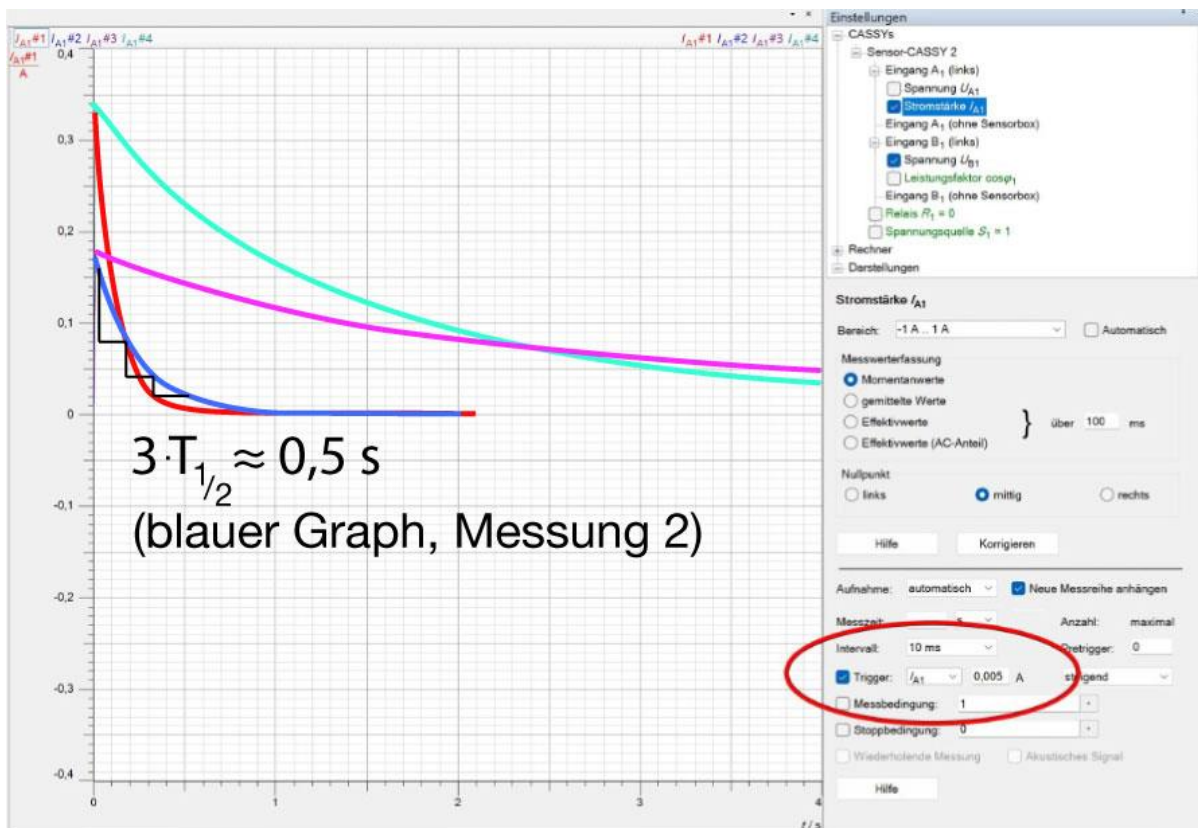
Wir interessieren uns für den Einfluss des Ohm'schen Widerstands und der Kapazität auf die Zeitkonstante  $\tau = R \cdot C$  sowie auf die im Kondensator gespeicherte Ladung (Messung mittels graphischer Integration). Die Kondensatoren sind mit einer Toleranz von  $\pm 20\%$  angegeben.

	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
$R$ in $\Omega$	$10,0 \pm 0,5$	$22,0 \pm 1,1$	$10,0 \pm 0,5$	$22,0 \pm 1,1$
$C$ in F	$0,010 \pm 0,002$	$0,010 \pm 0,002$	$0,10 \pm 0,02$	$0,10 \pm 0,02$
$U_0$ in V	$4,4 \pm 0,1$	$4,4 \pm 0,1$	$4,3 \pm 0,1$	$4,3 \pm 0,1$
$Q$ in C (graphisch integriert)	$0,044 \pm 0,002$	$0,043 \pm 0,001$	$0,47 \pm 0,02$	$0,47 \pm 0,02$
$T_{1/2}$ in s (am Graphen abgelesen)	$0,075 \pm 0,01$	$0,17 \pm 0,03$	$0,79 \pm 0,1$	$1,7 \pm 0,3$

Vergleich mit Theorie:

$\tau = R \cdot C$ in s	$0,10 \pm 0,03$	$0,22 \pm 0,06$	$1,0 \pm 0,3$	$2,2 \pm 0,6$
$Q = C \cdot U_0$ in C	$0,044 \pm 0,010$	$0,044 \pm 0,010$	$0,43 \pm 0,10$	$0,43 \pm 0,10$
$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$	$0,069 \pm 0,017$	$0,15 \pm 0,04$	$0,69 \pm 0,17$	$1,5 \pm 0,4$

**Hinweis:** Die Bestimmung der Messunsicherheiten ist im Anhang dargestellt.



**Abb. 4:** Die vier Kurven der Messungen 1 – 4. Gut zu erkennen ist der Einfluss der verschiedenen Zeitkonstanten auf den Ladevorgang, der unterschiedlich schnell erfolgt (1  $\triangleq$  rot, 2  $\triangleq$  blau, 3  $\triangleq$  türkis, 4  $\triangleq$  lila). Der Schnittpunkt mit der Hochwertachse liegt laut Theorie bei  $I_0 = \frac{U_0}{R}$  und ist bei jeweils zwei Messungen gleich.

Zum Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit dem Modell

$$I(t) = \frac{|U_0|}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

und

$$U(t) = |U_0| \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

können fakultativ die Skalierungsfunktionen des Messwerterfassungssystems genutzt werden. Dazu wählt man z. B. bei der Belegung der Hochwertachse eine logarithmische Auftragung, was die Exponentialfunktionen als fallende Geraden im Koordinatensystem erscheinen lässt.

Alternativ oder zusätzlich kann über die Regressionsfunktion des Messwerterfassungssystems eine Fit-Funktionsvorschrift für die exponentiellen Verläufe der Ladestromstärken ausgegeben werden:

Fit	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
$I(t)$	$0,38 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{0,11 \text{ s}}}$	$0,19 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{0,23 \text{ s}}}$	$0,40 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{1,1 \text{ s}}}$	$0,18 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{2,3 \text{ s}}}$

Vergleicht man diese funktionalen Zusammenhänge mit den theoretischen Werten der Tabelle

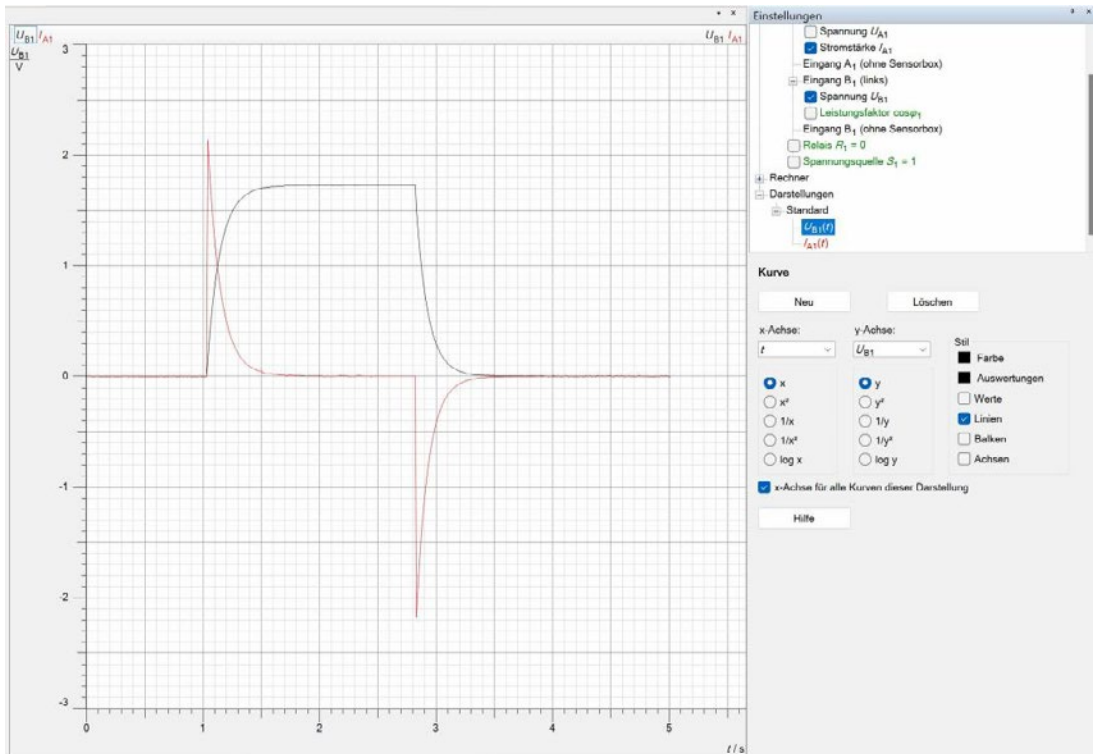
$$I(t) = \frac{|U_0|}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

erhält man zum Vergleich:

Theorie	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
$I(t)$	$0,44 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{0,10 \text{ s}}}$	$0,20 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{0,22 \text{ s}}}$	$0,44 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{1,0 \text{ s}}}$	$0,20 \text{ A} \cdot e^{-\frac{t}{2,2 \text{ s}}}$

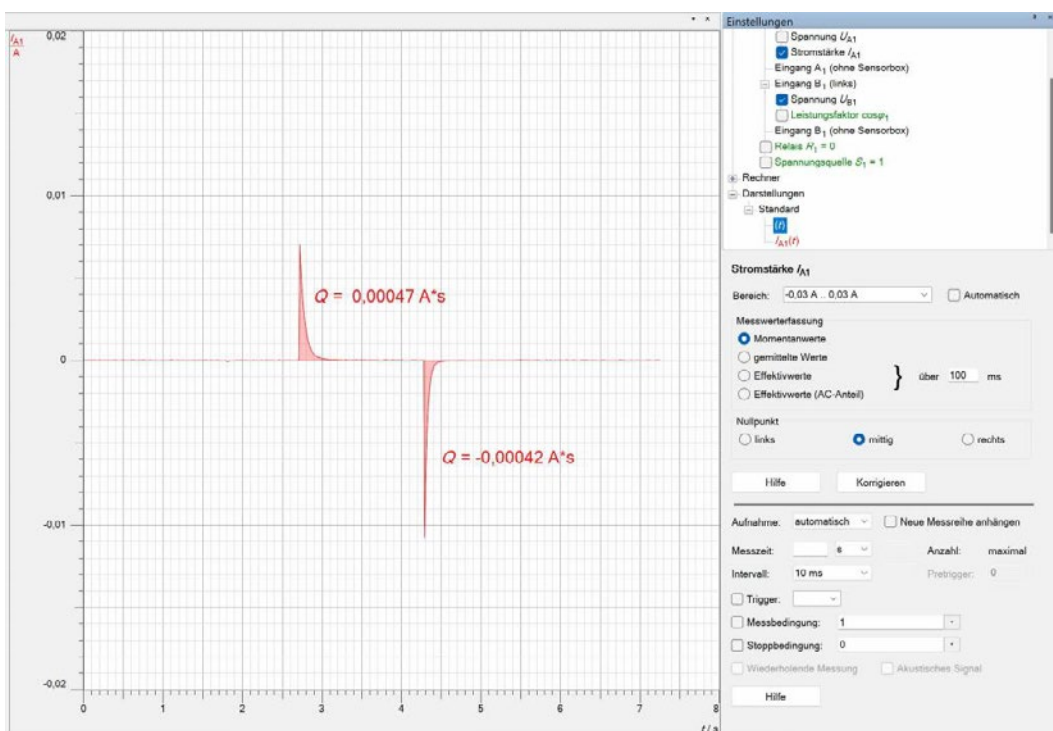
Neben der Stromstärke kann auch noch der zeitliche Verlauf der Spannung thematisiert werden. Die Aufnahme der Kurve erfolgt mit dem Messwerterfassungssystem analog. Auch hier bieten sich Vergleiche mit der Theorie an:

$$U(t) = |U_0| \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$



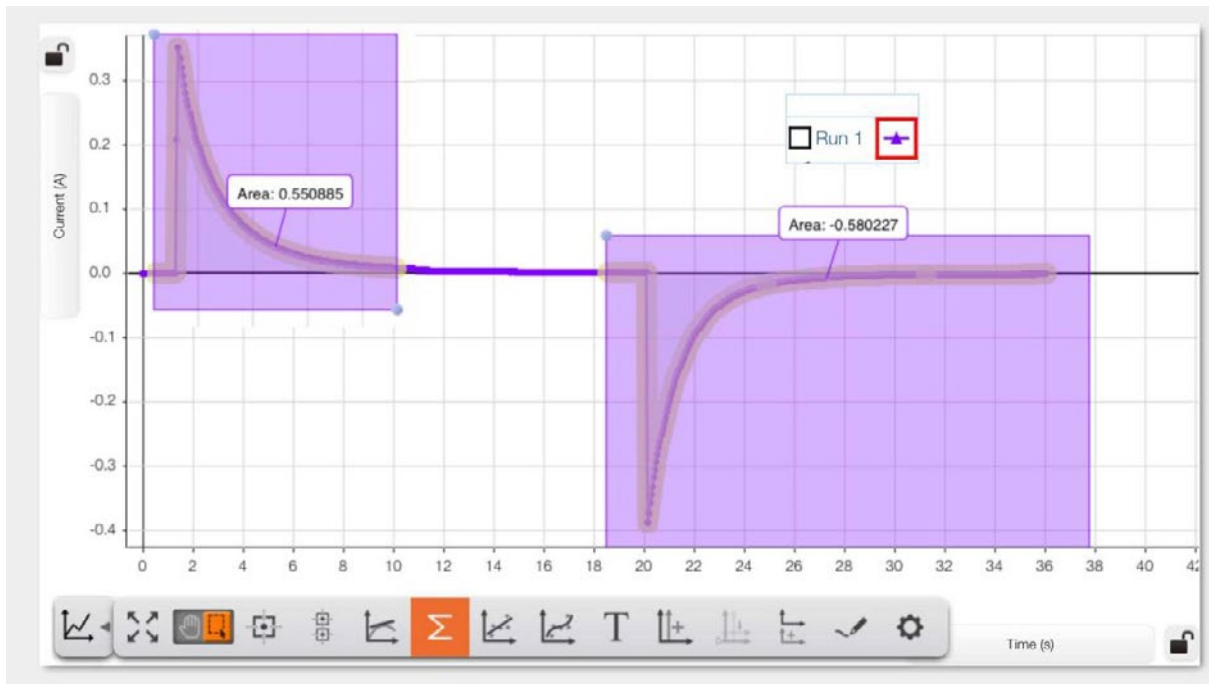
**Abb. 5:** Der Verlauf der Spannung (schwarz) und der Stromstärke (rot) im Vergleich. Sollten unerwünschte Knicks im Verlauf der Exponentialfunktion auftreten, könnte eine zu hohe Spannung oder eine mangelhafte Gleichspannung der Grund sein. Dann bietet sich eine Batterie als Elektrizitätsquelle an.

Die Experimente sind genauso mit den Breadboards durchführbar. Die gespeicherte Ladung ist dabei wegen anderer Bauteile um einige Größenordnungen kleiner, kann aber trotzdem gut aufgelöst werden:



**Abb. 6:** Der Verlauf der Stromstärke im Breadboard mit  $100 \mu\text{F}$  und  $330 \Omega$  bei  $4,78 \text{ V}$ .

Führt man die Messung mit den PASCO-Sensoren durch, können die Verläufe genauso aufgenommen und ausgewertet werden:



**Abb. 7:** Der Auf- und Entladevorgang mit PASCO-Sensoren aufgenommen. Eine kurze, bebilderte Anleitung zur Flächenbestimmung findet sich auch in den Lernhilfen (<https://qr-lernhilfen.de/mobileUrl?url=8aab6ae4aeda5b97>) auf dem folgenden Arbeitsblatt.



**Abb. 8:** Darstellung der Ladestromstärke für Kombinationen zweier Widerstände und zweier Kondensatoren, diesmal mit den PASCO-Sensoren aufgenommen. Der Schnittpunkt mit der Hochwertachse liegt laut Theorie bei  $I_0 = \frac{|U_0|}{R}$  und ist auch hier bei jeweils zwei Messungen gleich.

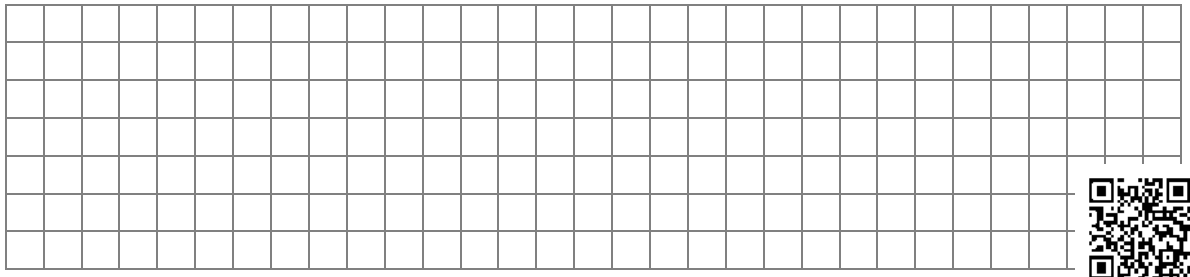
## Vorschlag eines möglichen Arbeitsblatts

### Ziel:

Wir wollen unsere mathematischen Modellierungen beim Auf- oder Entladevorgang eines Kondensators experimentell überprüfen.

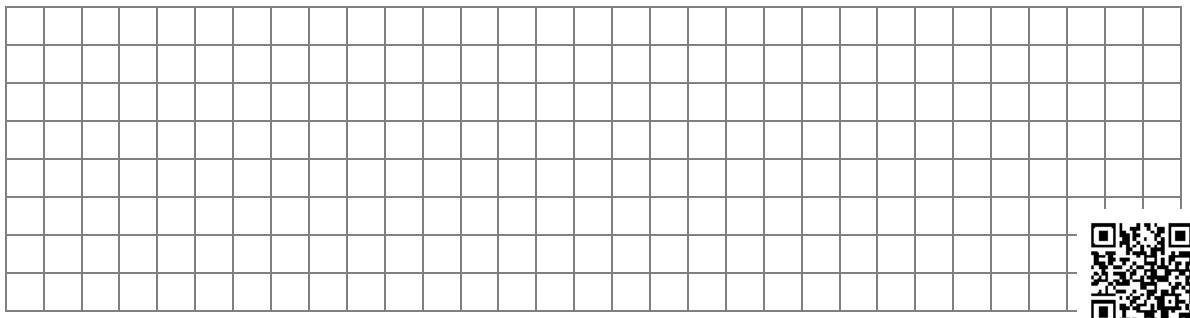
### Aufbau:

Für den Versuch sollen der Widerstand und der Kondensator in Reihe zuerst geladen und danach entladen werden. Über einen Wechselschalter wird zwischen dem Aufladevorgang und dem Entladeprozess gewechselt. Dabei soll der zeitliche Verlauf der Stromstärke des Kondensators aufgenommen werden. Zeichne einen möglichen Schaltplan und baue den Versuch auf. Wenn Du Hilfe brauchst, scanne den QR-Code.



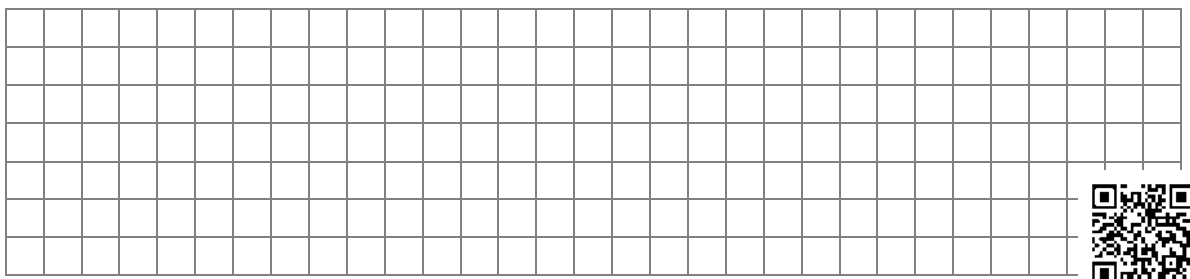
### Durchführung:

Starte den Aufladevorgang und messe den Verlauf der Stromstärke. Dieser soll aus Gründen der Einheitlichkeit positiv sein. Bring den Schalter nach dem vollständigen Laden in die Position für die Entladung und messe wieder den Verlauf. Erkläre, dass die Fläche unter dem Graphen der jeweils geflossenen Ladung entspricht. Wenn Du Hilfe brauchst, scanne den QR-Code.



### Messung und Auswertung:

Nutze das Messwerterfassungssystem, um die geflossene Ladung beim Auf- und Entladen graphisch zu bestimmen. Vergleiche mit dem theoretischen Wert und beschreibe Auffälligkeiten. Übernimm den qualitativen Verlauf hier auf das AB. Achte dabei auf Vorzeichen, Maximalwerte und Flächen.



Wir betrachten ab jetzt nur noch den Aufladevorgang. Variiere in mindestens drei weiteren Messungen den verwendeten Widerstand und Kondensator. Nutze folgende Tabelle, um gemessene Werte mit den theoretischen zu vergleichen:



	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
$R$ in $\Omega$				
$C$ in F				
$U_0$ in V				
$Q$ in C (graphisch integriert)				
$T_{1/2}$ in s (am Graphen abgelesen)				

Vergleich mit Theorie:

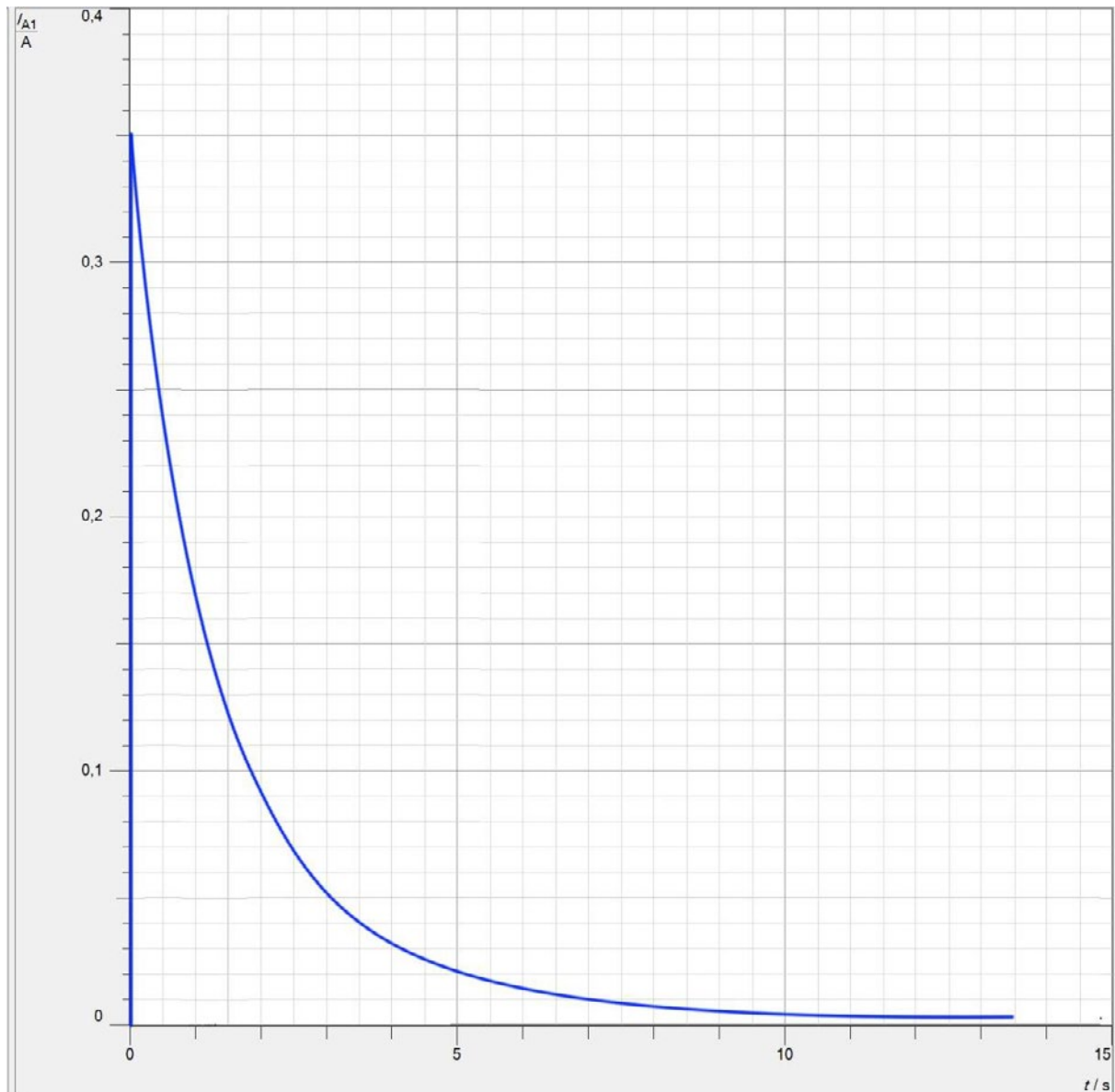
$\tau = R \cdot C$ in s				
$Q = C \cdot U_0$ in C				
$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$				

Nutze das folgende Wortgeländer, um möglichst viele richtige Sätze zu bilden:

Großer Widerstand	Große Kapazität	Große Stromstärke $I_0$ zu Beginn	Lange Halbwertszeit	Lange Abklingdauer
Mehr Ladung	Hohe Spannung	Weniger	Führt zu	Gleich viel

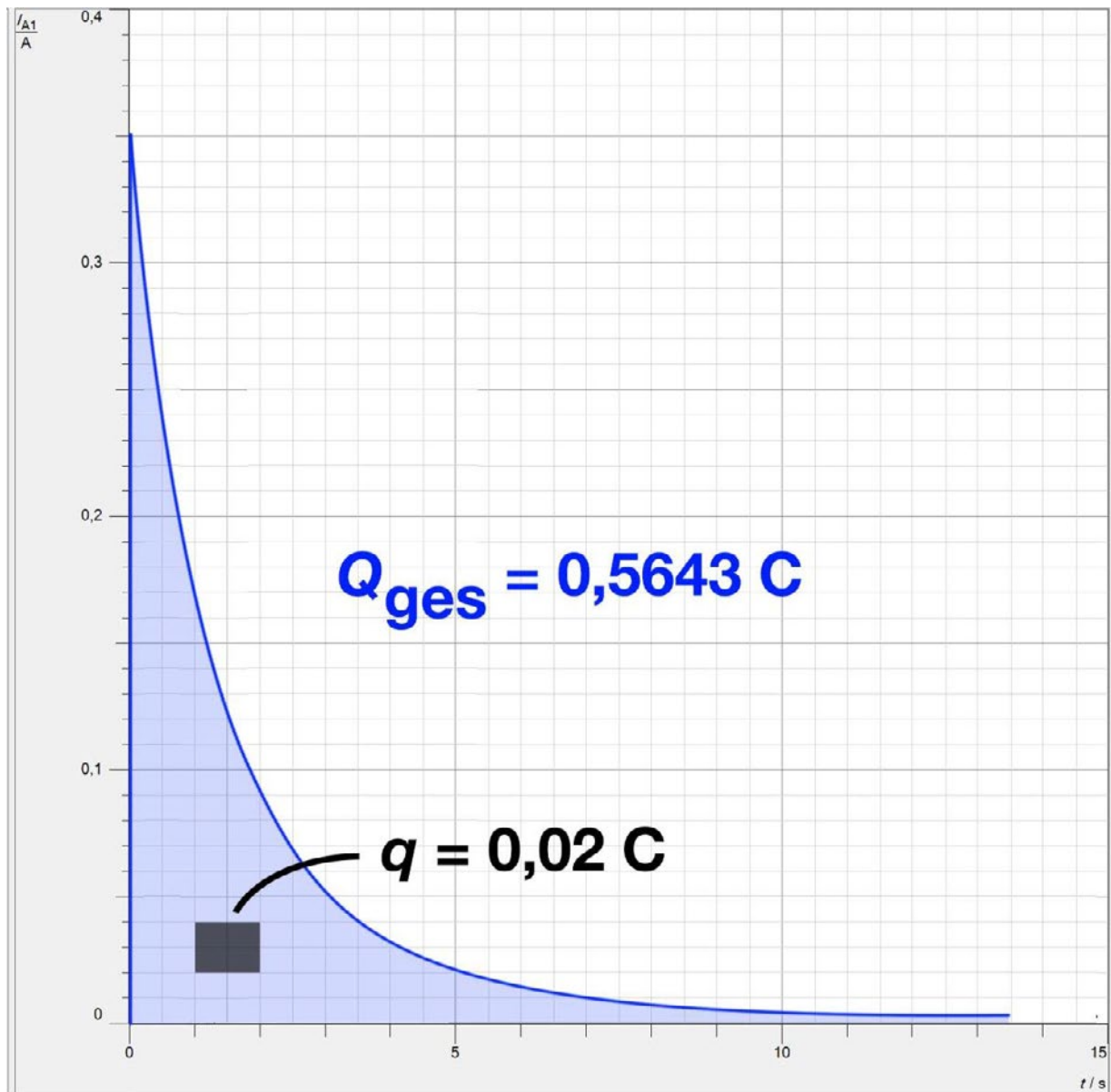
[illegible]

Folgende Abbildungen können z. B. als Kopiervorlagen genutzt werden um eventuell zusätzlich zur digitalen Auswertung des Integrals die Ladung händisch (Kästchen zählen) zu bestimmen. Bei folgender Messung betrug die Spannung 4,3 V und es wurde ein Kondensator mit  $C = 130.000 \mu\text{F}$  und ein Widerstand mit  $12 \Omega$  verwendet.



Bestimmt man die Halbwertszeit graphisch, erhält man ungefähr  $T_{1/2 \text{ abgelesen}} = 1,2 \text{ s}$ , was sich gut mit den obigen Werten deckt:  $T_{1/2 \text{ Theorie}} = R \cdot C \cdot \ln 2 = 1,1 \text{ s}$ .

Für die Auswertung könnten Kästchen à 0,02 C zum Abzählen nutzen. Der Wert für  $Q_{\text{ges}}$  ist dabei über die Integralauswertung des Messwerterfassungssystem entstanden.



## Anhang: Berechnung der Messunsicherheiten für Messung 1

Die in die Bestimmung der Zeitkonstanten  $\tau$ , Halbwertszeit  $T_{1/2}$  und Ladung  $Q$  eingehenden Größen sind mit Unsicherheiten behaftet: Nach Herstellerangaben beträgt die Unsicherheit des Widerstands 5 % und der Kapazität 20 %. Die Spannung  $U$  wurde auf  $\pm 0,1$  V genau bestimmt.

Die Größen  $\tau$ ,  $T_{1/2}$  und  $Q$  ergeben sich durch Multiplikation der mit Unsicherheiten belegten Größen  $R$ ,  $C$  und  $U$ . Ihre Messunsicherheiten  $a_\tau$ ,  $a_{T_{1/2}}$  und  $a_Q$  lassen sich aus den relativen Messunsicherheiten bestimmen, die gleich der Summe der relativen Messunsicherheiten der mit Unsicherheiten behafteten Eingangsgrößen  $R$ ,  $C$  oder  $U$  ergeben. Im Folgenden ist die Berechnung beispielhaft für die Messung 1 dargestellt:

- $\gamma_\tau = \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C} = \frac{0,5}{10,0} + \frac{0,002}{0,010} = 0,25$

Damit ergibt sich für die Unsicherheit der Zeitkonstanten

$$\Delta\tau = \tau \cdot \gamma_\tau = 0,10 \text{ s} \cdot 0,25 = 0,025 \text{ s}$$

und damit für die mit Unsicherheiten belegte Zeitkonstante  $\tau = (0,10 \pm 0,03) \text{ s}$ .

- $\gamma_Q = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta U}{U} = \frac{0,002}{0,010} + \frac{0,1}{4,4} = 0,22$

Damit ergibt sich für die Unsicherheit der Ladung

$$\Delta Q = Q \cdot \gamma_Q = 0,044 \text{ F} \cdot 0,22 = 0,010 \text{ F}$$

und damit für die mit Unsicherheiten belegte Ladung  $Q = (0,044 \pm 0,010) \text{ F}$ .

- $\gamma_{T_{1/2}} = \frac{\Delta T_{1/2}}{T_{1/2}} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C} = \frac{0,5}{10,0} + \frac{0,002}{0,010} = 0,25$

Damit ergibt sich für die Unsicherheit der Halbwertszeit

$$\Delta T_{1/2} = T_{1/2} \cdot \gamma_{T_{1/2}} = 0,069 \text{ s} \cdot 0,25 = 0,017 \text{ s}$$

und damit für die mit Unsicherheiten belegte Halbwertszeit  $T_{1/2} = (0,069 \pm 0,017) \text{ s}$ .

Für die Fehlerberechnung bei der Integration der Ladung  $Q$  wurde die Messung mit dem Messwerterfassungssystem zehnmal durchgeführt und dann der Mittelwert gebildet:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{1}{10} \cdot (0,042 + 0,043 + 0,048 + 0,039 + 0,045 + 0,042 + 0,049 + 0,046 + 0,043 + 0,045) \text{ C} \\ &= 0,044 \text{ C} \end{aligned}$$

Die zugehörige empirische Standardabweichung beträgt

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (Q_i - 0,044 \text{ C})^2} = 0,004 \text{ C}$$

Für die Messunsicherheit aufgrund der Standardabweichung des Mittelwerts folgt somit mit

Aufrunden der Messunsicherheit  $\Delta Q = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,002 \text{ C}$ , womit wir insgesamt  $Q = 0,044 \text{ C} \pm 0,002 \text{ C}$  erhalten.



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

***Digitale Lernhilfen zum eigenen Import in QR-Lernhilfen***

***Lernhilfen als PDF zum Download***

## 2.2 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Kapazitätsmessungen

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• stabilisiertes Netzgerät ca. 12 V</li> <li>• Experimentierkabel</li> <li>• Krokodilklemmen</li> <li>• Rastersteckplatte</li> <li>• Multimeter, das im mV-Bereich messen kann</li> <li>• Folienkondensatoren (ca. 1 <math>\mu\text{F}</math>)</li> <li>• PVC (<i>Polyvinylchlorid</i>) - Platten (z. B. 20 cm x 30 cm x 2 mm)</li> <li>• Glasplatte (z. B. 3 bis 6 mm dick)</li> <li>• weitere Platte beliebigen Materials</li> <li>• Massestück zum Beschweren</li> <li>• Koaxialkabel (z. B. ein altes SAT-Kabel für den Fernseher)</li> </ul>
Digitales Material	evtl. Tabellenkalkulation

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 LB 4 eA Experimentelles Arbeiten

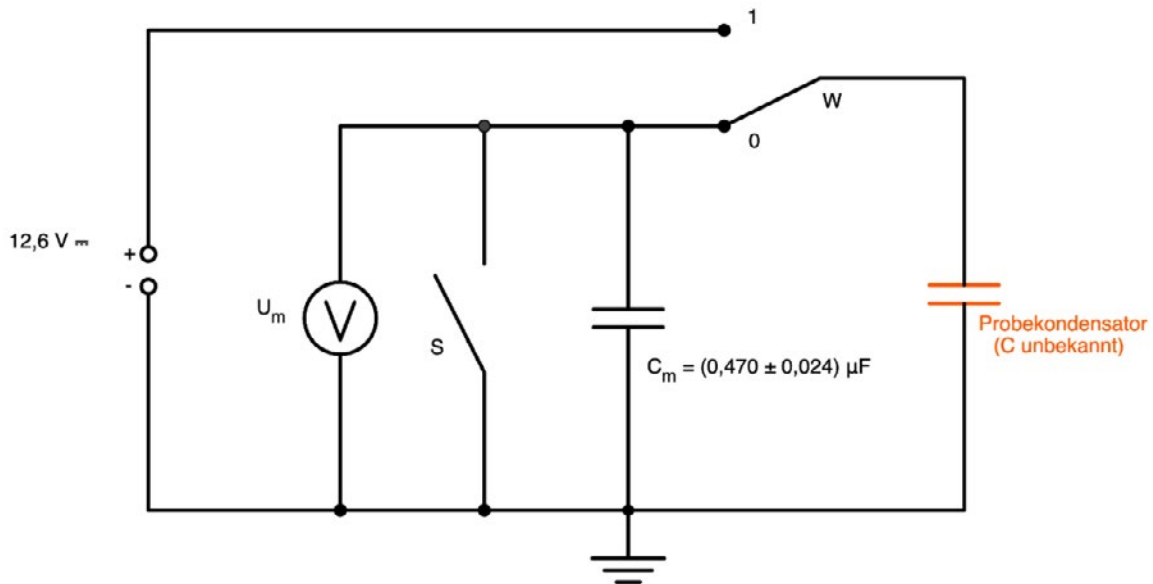
Die Schülerinnen und Schüler bestimmen experimentell am Plattenkondensator die relative Permittivität eines vorgegebenen Materials. In einem selbst geplanten Experiment bestimmen sie die Kapazität eines Kondensators anderer Geometrie und vergleichen sie mit einem recherchierten Wert.

### Ziel

Die Schülerinnen und Schüler kennen bereits die Formel zur Berechnung der Kapazität eines luftgefüllten Plattenkondensators und nutzen diese, um die Permittivität von PVC und Glas zu bestimmen. Sie erkennen, dass die dazu nötige Ladungsmessung mit einem herkömmlichen Multimeter nicht funktioniert. Um das Problem zu lösen, verwenden Sie die Formel  $C = Q/U$ , um mit Hilfe einer bekannten Kapazität die Ladungsmessung auf eine Spannungsmessung zurückzuführen. Bei der Durchführung schätzen sie Messunsicherheiten geeignet ab und versuchen diese zum Beispiel durch Mehrfachmessungen zu minimieren. Die so bestimmten Permittivitäten vergleichen die Schülerinnen und Schüler mit Literaturwerten.

## Aufbau

Ziel des Messaufbaus ist es, die unbekannte Kapazität eines Probekondensators zu bestimmen. Die Schwierigkeit des Versuchs besteht darin, die Ladung  $Q$  des Probekondensators zu messen. Um nicht auf teure und empfindliche Ladungsmessgeräte zurückgreifen zu müssen, wird bei dem hier beschriebenen Schülerversuch ein zweiter Messkondensator bekannter Kapazität  $C_m$  verwendet. Der hier verwendete Kondensator besitzt herstellungsbedingt eine Messunsicherheit von 5 %.



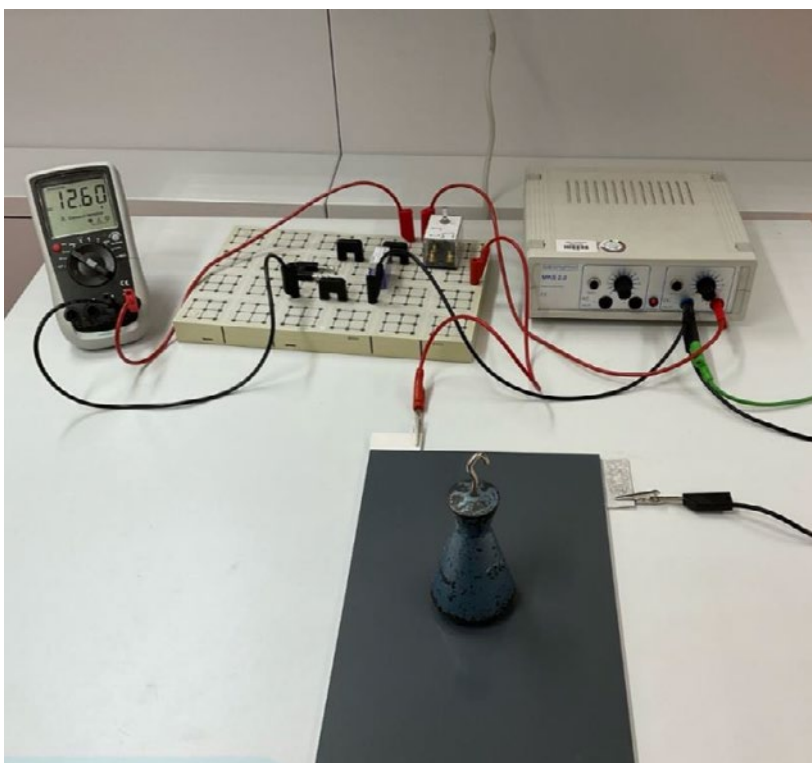
**Abb. 1:** Schaltskizze des Messaufbaus

In der Schaltskizze ist an der Schalterposition zu erkennen, dass der Probekondensator sich gerade entlädt und den Messkondensator dabei auflädt. Anschließend wird mit dem Multimeter die am Kondensator  $C_m$  anliegenden Spannung  $U_m$  gemessen. Um die Auswertung zu vereinfachen, sollte bei der Dimensionierung des Messkondensators darauf geachtet werden, dass die Kapazität deutlich größer (hier mindestens Faktor 400) ist als die Kapazität des Probekondensators. Dadurch ist die Messspannung  $U_m$  im Vergleich zur Ladespannung  $U$  (hier 12,6 V) am Probekondensator vernachlässigbar gering. Nur so kann davon ausgegangen werden, dass sich der Probekondensator annähernd vollständig entlädt. Für die Messung der Spannung  $U_m$  benötigt man dafür allerdings ein hochohmiges Multimeter, das im Bereich von wenigen mV noch zuverlässig misst. Die meisten mittelpreisigen Multimeter genügen jedoch diesen Anforderungen. Ist die Messspannung bestimmt, so kann mit Hilfe der Formel  $Q = C_m \cdot U_m$  die Ladung und anschließend mit Hilfe der Ladespannung  $U$  die Kapazität des Probekondensators berechnet werden. Bei jeder Messung wurden folgende Schritte immer auf gleicher Weise durchgeführt:

- Der Wechselschalter steht auf der Position 0.
- Der Erdungsschalter S wird geschlossen. Dadurch entladen sich alle Kondensatoren vollständig.
- Der Wechselschalter wird auf die Position 1 gestellt und dadurch der Probekondensator aufgeladen.

- Der Erdungsschalter S wird geöffnet. Jetzt sollten alle unnötigen Bewegungen vermieden werden, um die Gefahr einer ungewollten elektrostatischen Aufladung des Messkondensators zu reduzieren.
- Der Wechselschalter wird nun auf die Position 0 gestellt.
- Nun steigt die Spannung am Multimeter rasch an. Nach ca. zwei Sekunden stabilisiert sich diese. Die Spannung wird nun sofort protokolliert.

Zu jeder Versuchsreihe wurden 10 Messungen durchgeführt, um anschließend den Mittelwert sowie dessen Standardabweichung zu bestimmen. Sicherlich kann man auf die beiden Schalter verzichten und das Gleiche durch Umstecken der Kabel am Steckbrett bewirken, allerdings vermeidet man durch die Verwendung der beiden Schalter zusätzliche Handgriffe am Messaufbau, die das Messergebnis möglicherweise verfälschen.

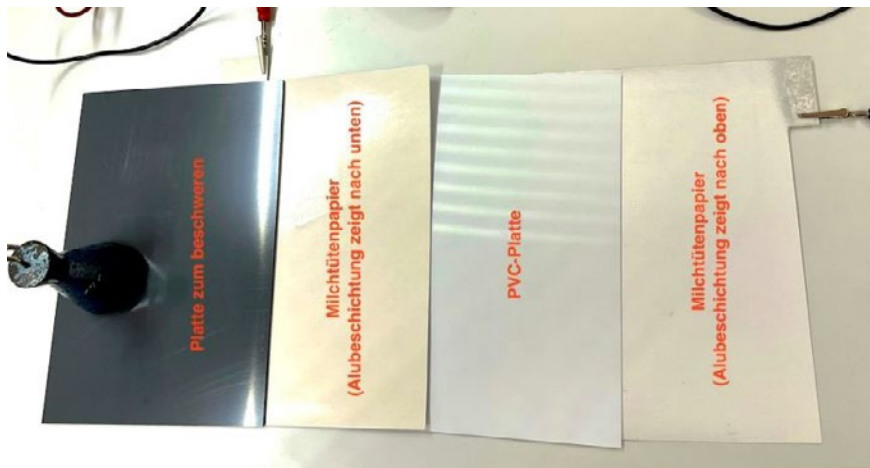


**Abb. 2:** Foto des Aufbaus zur Messung der Permittivität von PVC (Polyvinylchlorid). Im Versuch wird gerade die Ladespannung von 12,60 V gemessen.

## Messung und Auswertung

### 1. Teil: Permittivität von PVC und Glas

Der Probekondensator ist bei dieser Messung ein Plattenkondensator, der aus verschiedenen Schichten (siehe Abb. 3) aufgebaut ist. Das Milchtütenpapier bildet dabei die beiden Kondensatorplatten, weshalb dessen Alubeschichtung jeweils nach innen gerichtet ist. Zwischen den Messreihen wurde lediglich die PCV-Platte z. B. durch eine Glasplatte ausgetauscht.



**Abb. 3:** Die Abfolge der einzelnen Schichten des Probekondensators, die exakt übereinandergelegt einen Plattenkondensator (20,0 cm lang; 30,0 cm breit) bilden. Die graue Platte und das Massestück liegen oben auf und sorgen für einen gleichmäßigen Anpressdruck der einzelnen Schichten.

Der Plattenkondensator wurde hier mit Milchtütenpapier realisiert, da dieses im Vergleich zu Alufolie bereits eine isolierende Laminierung besitzt, die vor Kurzschlüssen schützt. Bei sorgsamer Nutzung konnten jedoch mit Alufolie ebenfalls gute Ergebnisse erzielt werden. Milchtütenpapier ist zum Beispiel im Handel für Malerbedarf erhältlich, da es dort als Abdeckkarton zum Schutz der Böden verwendet wird. Die Laminierung des insgesamt 0,5 mm dicken Milchtütenpapiers sorgt allerdings auch für einen höheren Plattenabstand. Bei der folgenden Auswertung wurde die Vergrößerung des Plattenabstandes aufgrund der Laminierung mit jeweils  $(0,2 \pm 0,1)$  mm abgeschätzt. Der Plattenabstand  $d$  berechnet sich somit folgendermaßen:

$$d = d_{\text{Probenmaterial}} + 2 \cdot 0,2 \text{ mm}$$

Da die oberste Platte und das Massestück nur für einen gleichmäßigen Anpressdruck sorgen sollen, können diese auch leicht durch andere Materialien wie zum Beispiel ein schweres Buch oder ähnliches ersetzt werden. Die Berechnung der Permittivität geschieht in folgenden Schritten:

- Ladung  $Q = C_m \cdot U_m$
- Kapazität des Probekondensators  $C = \frac{Q}{U}$ , wobei die Ladespannung  $U$  bei allen folgenden Messungen 12,6 V beträgt
- theoretische Kapazität des luftgefüllten Kondensators  $C_{\text{Luft}} = \epsilon_0 \frac{0,20 \text{ m} \cdot 0,30 \text{ m}}{d}$
- Permittivität  $\epsilon_r = \frac{C}{C_{\text{Luft}}}$

Die Messwerte und die dazugehörigen Berechnungen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	1 mm PVC	2 mm PVC	4 mm PVC	4 mm GLAS
	$U_m$ in mV	$U_m$ in mV	$U_m$ in mV	$U_m$ in mV
1. Messung	31,0	21,5	12,4	27
2. Messung	31,1	21,1	12,0	27
3. Messung	31,3	21,6	12,1	26
4. Messung	31,1	20,9	11,9	27
5. Messung	31,0	19,4	12,2	27
6. Messung	31,0	22,7	11,7	27
7. Messung	31,2	23,2	12,1	26
8. Messung	31,3	21,3	11,6	27
9. Messung	31,0	20,9	11,8	27
10. Messung	30,8	21,7	11,7	26
Mittelwert von $U_m$ in mV	31,08	21,43	11,95	26,7
Empirische Standardabweichung der Messwerte von $U_m$ in mV	0,15	1,04	0,25	0,5
Standardabweichung des Mittelwerts von $U_m$ in mV	0,05	0,33	0,08	0,15
rel. Messunsicherheit	0,2 %	1,5 %	0,7 %	0,6 %
Kapazität des Probekondensator $C$ in $F$	$1,16 \cdot 10^{-9}$	$7,99 \cdot 10^{-10}$	$4,46 \cdot 10^{-10}$	$9,96 \cdot 10^{-10}$
rel. Messunsicherheit	5,2 %	6,5 %	5,7 %	5,6 %
theor. Kapazität in $F$ (luftgefüllt)	$3,79 \cdot 10^{-10}$	$2,21 \cdot 10^{-10}$	$1,21 \cdot 10^{-10}$	$1,26 \cdot 10^{-10}$
rel. Messunsicherheit	15 %	9,2 %	5,4 %	5,4 %
Permittivität $\epsilon_r$	$3,06 \pm 0,62$	$3,61 \pm 0,62$	$3,69 \pm 0,43$	$7,87 \pm 0,91$
rel. Messunsicherheit <sup>1</sup>	20 %	17 %	12 %	12 %

<sup>1</sup> Da die verwendeten Formeln nur Produkte oder Quotienten enthalten, ergibt sich der Wert aus der Summe der relativen Messungenauigkeiten aller eingesetzten Größen. Anmerkungen zur Berechnung der Messunsicherheiten befinden sich im Anhang.

Die Messergebnisse stimmen im Rahmen der Messunsicherheiten mit den Literaturwerten sehr gut überein.

$$\text{Glas}^2 \quad \epsilon_r = 5 \dots 16$$

$$\text{PVC}^3 \quad \epsilon_r = 3,4 \text{ (bis 50 Hz)}$$

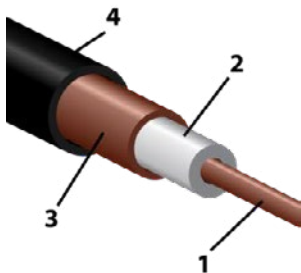
Bei der Berechnung der Messunsicherheiten wurde noch nicht berücksichtigt, dass die Laminierung und die Lufteinschlüsse im Bereich zwischen der PVC-Platte und der Alufolie des Milchtütenpapiers die Permittivität herabsetzen könnten. Da dieser Bereich bei einer Platte geringerer Dicke einen größeren Anteil einnimmt, würde dies die etwas größere Abweichung bei der 1 mm PVC-Platte erklären.

## 2. Teil: Kapazität eines Koaxialkabels

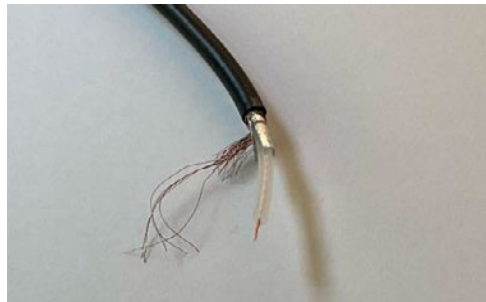
Ein Koaxialkabel lässt sich in guter Näherung als Zylinderkondensator betrachten, dessen Kapazität sich mit folgender Formel berechnen lässt:

$$C_{\text{Zyl.}} = 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \frac{l}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

Bei dem hier verwendeten Koaxialkabel handelt es sich um ein altes SAT-Kabel, das im TV-Bereich Verwendung fand. Es wurde an einem Ende aufgeschnitten und Schicht für Schicht entmantelt (siehe Abb. 5). Die Maße des Kabels wurden mit einem Messschieber bzw. einem Maßband bestimmt:



**Abb. 4:** Das verwendete Koaxialkabel besteht aus (1) einer Seele, (2) dem Dielektrikum (PE), (3) einem Außenleiter mit Abschirmung und (4) einem Schutzmantel<sup>4</sup>.



**Abb. 5:** Koaxialkabel SAT-TV-Kabel Typ RG-58

- Länge des Kabels  $l = (5,03 \pm 0,05) \text{ m}$
- Durchmesser der Seele  $d_1 = (0,6 \pm 0,1) \text{ mm}$
- Außendurchmesser des Dielektrikums  $d_2 = (2,9 \pm 0,1) \text{ mm}$
- Dielektrikum - Polyethylen PE  $\epsilon_r = 2,3^5$

<sup>2</sup> IQB-Mathematisch-Naturwissenschaftlicher-Formelsammlung

<sup>3</sup> Stöcker, Taschenbuch der Physik, Frankfurt am Main, 2005, S. 554

<sup>4</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Koaxialkabel> cc-by-3.0 lizenziert, User Tkgd2007, 24.03.2024

<sup>5</sup> Stöcker, Taschenbuch der Physik, Frankfurt am Main, 2005, S. 554

Berechnung der Kapazität aufgrund der Geometrie des Kondensators:

	$d_1$ in mm	$d_2$ in mm	$\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$	$l$ in m	$C_{\text{Zyl.}}$ in F
	$0,60 \pm 0,10$	$2,90 \pm 0,10$	$1,58 \pm 0,22$	$5,03 \pm 0,05$	$(4,1 \pm 0,6) \cdot 10^{-10}$
rel. Messunsicherheit <sup>6</sup>			14 %	1,0 %	15 %

Die Bestimmung der Kapazität mit Hilfe der obigen Versuchsanordnung ergab folgendes Ergebnis:

	$U_m$ in mV
1. Messung	10,3
2. Messung	10,8
3. Messung	10,7
4. Messung	11,0
5. Messung	10,5
6. Messung	10,8
7. Messung	10,7
8. Messung	11,2
9. Messung	10,9
10. Messung	11,5
Mittelwert von $U_m$ in mV	10,84
empirische Standardabweichung von $U_m$ in mV	0,34
Standardabweichung des Mittelwerts von $U_m$ in mV	0,11
rel. Messunsicherheit	1,0 %
experimentell bestimmte Kapazität des Probekondensator C in F	$(4,04 \pm 0,24) \cdot 10^{-10}$
rel. Messunsicherheit	6,0 %

Die beiden Ergebnisse stimmen im Rahmen der durch die jeweiligen Messunsicherheiten bestimmten Vertrauensintervalle sehr gut überein, sodass der Versuch die Modellierung des Koaxialkabels mit Hilfe eines Zylinderkondensators rechtfertigt. Zu bemerken ist auch, dass vermutlich durch die gute Abschirmung des Kabels (im Vergleich zu Teil 1) die Messung der Spannung deutlich weniger anfällig bzgl. elektrostatischer Störungen war.

<sup>6</sup> Anmerkungen zur Berechnung der Messunsicherheiten befinden sich im Anhang.

## Anhang: Anmerkungen zur Berechnung der Messunsicherheiten

### zu 1. Teil: Permittivität von PVC und Glas

Die Kapazität des luftgefüllten Plattenkondensators berechnet sich gemäß der Formel

$$C_{Luft} = \epsilon_0 \frac{0,20 \text{ m} \cdot 0,30 \text{ m}}{d}$$

Die Messunsicherheit der Länge und Breite der Platten kann mit  $\pm 1 \text{ mm}$  abgeschätzt werden und liegt damit bei 0,3 % für die Länge bzw. 0,5 % für die Breite. Da die Formel aus einem Produkt und einem Quotienten besteht, berechnet sich die relative Messunsicherheit von  $C_{Luft}$  aus der Summe der relativen Messunsicherheiten der beteiligten Größen.

*Beispiel: 1 mm PVC-Platte*

Für diese Messreihe beträgt  $d = (1,4 \pm 0,2) \text{ mm}$ . Die relative Messunsicherheit ist somit:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{0,2 \text{ mm}}{1,4 \text{ mm}} = 14,3\%$$

Insgesamt ergibt sich folgende relative Messunsicherheit für  $C_{Luft}$

$$\frac{\Delta C_{Luft}}{C_{Luft}} = 14,3\% + 0,2\% + 0,5\% = 15\%$$

Andererseits gilt für die Kapazität des Probekondensators:

$$C = \frac{C_m \cdot U_m}{U}$$

Die Kapazität  $C_m$  des hier verwendeten Messkondensators besitzt herstellungsbedingt eine relative Messunsicherheit von 5 %. Die empirische Standardabweichung  $\sigma$  (Taschenrechner oder Tabellenkalkulation „=STABW(...)“) als Maß für die Streuung der einzelnen Messwerte ergibt 0,15 mV. Aufgrund des Stichprobenumfangs von 10 Messungen ist es hier gerechtfertigt als Messunsicherheit  $\Delta U_m$  den etwas kleineren Wert der Standardabweichung des Mittelwerts von  $U_m$  anzunehmen. Dieser ergibt sich aus der empirischen Standardabweichung zu

$$\Delta U_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0,15 \text{ mV}}{\sqrt{10}} = 0,05 \text{ mV}$$

Damit ergibt sich für  $U_m$  eine relative Messunsicherheit von 0,2 %. Da die Formel für  $C$  ein Produkt ist, werden die relativen Messunsicherheiten der eingehenden Größen addiert. Die relative Messunsicherheit von  $C$  beträgt somit mindestens 5,2 %.

Die Permittivität ergibt sich aus dem Quotienten der beiden Kapazitäten. Die relative Messunsicherheit dieser zusammengesetzten Größe berechnet sich ebenfalls aus der Summe der relativen Messunsicherheiten der eingehenden Größen:

$$5,2 \% + 14,3 \% = 20 \%$$

Auf der gleichen Weise erhält man die Messunsicherheiten der anderen Messreihen.

## zu 2. Teil: Kapazität eines Koaxialkabels

Die Messunsicherheit bei der Bestimmung der Kapazität  $C$  des Probekondensators berechnet sich auf die gleiche Weise wie im ersten Versuchsteil.

Für die Bestimmung der Messunsicherheit der Kapazität aufgrund der Geometrie des Koaxialkabels sind weitere Überlegungen nötig, da diese sich nicht nur aus Produkten oder Quotienten zusammensetzt, sondern auch von der Funktion  $\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$  abhängig ist. Zur Abschätzung der Messunsicherheit der Logarithmusfunktion berechnen wir neben dem Bestwert einen maximalen und einen minimalen Wert auf Grundlage der Messunsicherheiten der beteiligten Durchmesser  $d_1 = (0,6 \pm 0,1)$  mm und  $d_2 = (2,9 \pm 0,1)$  mm.

Bestwert:

$$\ln\left(\frac{2,9}{0,6}\right) = 1,58$$

Maximalwert:

$$\ln\left(\frac{2,9 + 0,1}{0,6 - 0,1}\right) = 1,79$$

Minimalwert:

$$\ln\left(\frac{2,9 - 0,1}{0,6 + 0,1}\right) = 1,39$$

Die betragsmäßig größte Abweichung vom Bestwert ist somit  $|1,58 - 1,79| = 0,22$ . Bezogen auf den Bestwert ergibt sich daraus für  $\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$  eine relative Messunsicherheit von 14 %.

Da sich die Formel für die Kapazität eines Zylinderkondensators aus einem Quotienten zusammensetzt, berechnet sich die relative Messunsicherheit aus der Summe der relativen Messunsicherheiten der beteiligten Größen gemäß

$$\frac{\Delta C_{\text{Zyl.}}}{C_{\text{Zyl.}}} = 14\% + 1\% = 15\%.$$



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

## 2.3 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment

### Messungen mit der Hall-Sonde

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elektrizitätsquelle Voltcraft HPS-16010, Restwelligkeit &lt; 5 %</li> <li>• Hall-Sonde axial und tangential, <math>\pm 1 \text{ T}</math>, LD 524 0381</li> <li>• Hall-Sonde axial, <math>\pm 1 \text{ T}</math>, LD 524 0382</li> <li>• Hall-Sonde axial, <math>\pm 0,3 \text{ mT}</math>, LD 524 0383</li> <li>• lange Spule, zweimal 30 cm, LD 516 22 (neu: LD 516 244)</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 4 Experimentelles Arbeiten

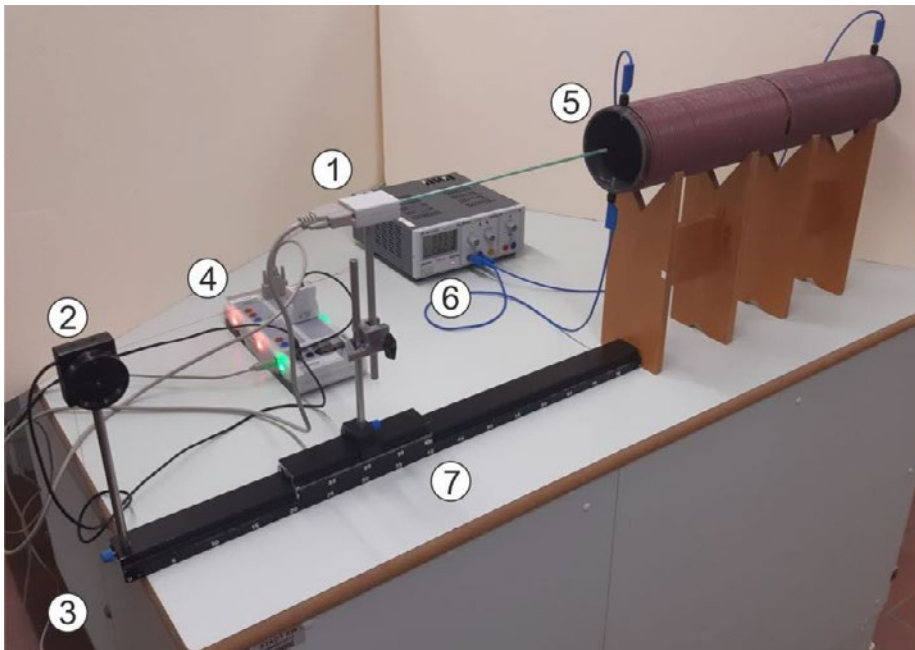
Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Struktur des Magnetfeldes im Innenraum einer langgestreckten Spule oder eines Helmholtz-Spulenpaars, identifizieren Homogenitätsbereiche und visualisieren ihre Ergebnisse in passenden Darstellungsformen. Sie untersuchen die Überlagerung der Magnetfelder von hintereinandergeschalteten kurzen Spulen entlang der Spulenachse und ermitteln die radiale Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte bei einem stromdurchflossenen geraden Draht.

### Ziel

Im Rahmen dieses Schülerexperiments erweitern die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen hinsichtlich Homogenität des magnetischen Felds innerhalb einer Spule, erkennen die Additivität der magnetischen Flussdichte durch die Anordnung mehrerer Spulen in Reihe sowie charakterisieren die Struktur des Magnetfelds eines stromdurchflossenen geraden Drahts. Besonderes Augenmerk kommt der Darstellung der erhaltenen Messwerte zu, müssen doch dreidimensionale Felder in zwei Dimensionen abgebildet werden. Auch wenn der LehrplanPLUS hier keinen Schwerpunkt setzt, so bietet sich im ersten Teil des Experiments eine Betrachtung der Messunsicherheiten mit den daraus resultierenden Abweichungen an.

## Allgemeiner Aufbau

Die Messung der magnetischen Flussdichte erfolgt jeweils mit einer Hall-Sonde und dem dazugehörigen Betriebsgerät. Dabei erleichtert die jeweilige Nutzung von axialer und tangentialer Sonde die Positionierung der Sonden je nach Versuchsaufbau. Die Verschiebung der Sonde erfolgt jeweils in einer Dimension. Um dies zu kontrollieren, empfiehlt es sich, die Sonde verschiebbar auf einer Schiene zu positionieren. Der Nullpunkt der Ortsmessung ist prinzipiell frei wählbar.



**Abb. 1:** Beispielhafter Versuchsaufbau zur Messung der magnetischen Flussdichte in einer langgestreckten Spule in axialer Richtung:

① axiale Hall-Sonde, ② Drehbewegungssensor, ③ Massestück ab Faden, der über den Drehbewegungssensor zur Sonde verläuft, ④ Messwerterfassungssystem, ⑤ langgestreckte Spule, ⑥ Elektrizitätsquelle, ⑦ Schiene mit verschiebbarer Halterung der Hall-Sonde.

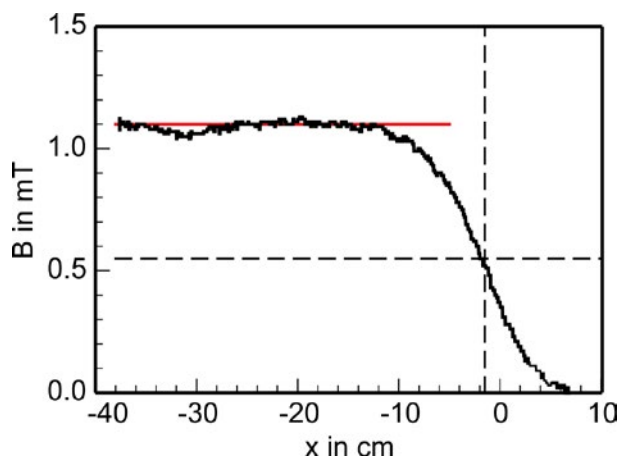
Beim in Abb. 1 vorgestellten Aufbau erfolgt die Messung mit einem Messwerterfassungssystem, das sowohl die magnetische Flussdichte mit der Hall-Sonde (① in Abb. 1) als auch den Ort der Messung in einer Dimension aufzeichnet. Die Ortsmessung erfolgt über einen Drehbewegungssensor (② in Abb. 1), über den ein Faden geführt ist, der an einem Ende an der Hall-Sonde befestigt und mit einem am anderen Ende hängenden Massestück gespannt wird. Um ein Verrutschen des Fadens auf dem Drehrad zu verhindern, ist der Faden eineinviertelmal um das Rad gewickelt. Selbstverständlich ist eine Durchführung des Versuchs auch ohne Messwerterfassungssystem respektive ohne der damit erfolgten Ortsmessung möglich. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Wertepaare je Messung deutlich, was jedoch die Ermittlung wesentlicher Eigenschaften bei gleichem Vorgehen nicht schlechter stellt. Ohne automatisierte Ortsmessung empfiehlt sich eine Abwägung, ob die Schrittweite der Ortsmessung angegeben oder von den Lernenden anhand der ortsabhängigen Änderung der magnetischen Flussdichte selbst festgelegt werden soll.

## Messung und Auswertung

### 1. Magnetfeld einer langen Spule

Das Magnetfeld der langgestreckten Spule soll sowohl in Richtung als auch quer zur Spulenachse dargestellt werden. Die verwendete Spule hat 240 Windungen bei einer Spulenlänge von  $(60,5 \pm 0,5)$  cm, die auf einem Rohr mit 12 cm Außendurchmesser gewickelt sind. Bei den Messungen beträgt die Stromstärke  $(2,0 \pm 0,1)$  A.

Der Aufbau erfolgt für die Messung in axialer Richtung gemäß Abb. 1. Als Nullpunkt der Ortsmessung wird der Rand der Spule gewählt, die Wicklungen der Spule beginnen jedoch im Mittel um ca. 1,5 cm versetzt, was mit der senkrechten gestrichelten Linie gekennzeichnet ist. Aufgrund der Spulenlänge sowie der auf 37 cm begrenzten Länge des Messstabs der axialen Hall-Sonde kann die magnetische Flussdichte nicht entlang der gesamten Spulenlänge gemessen werden.



**Abb. 2:** Verlauf der magnetischen Flussdichte der langgestreckten Spule entlang der Spulenachse. Als Nullpunkt der Ortsmessung wurde der Anfang der Spule gewählt, der Ort des Beginns der Drahtwicklungen ist mit der senkrechten gestrichelten Linie gekennzeichnet. Die Spule ist 60 cm lang.



**Abb. 3:** Messung der magnetischen Flussdichte in der Spulenmitte quer zur Spulenachse.

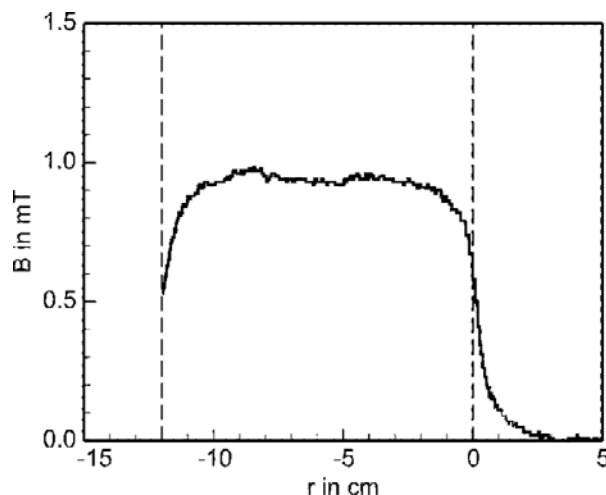
Abb. 2 zeigt den Verlauf der magnetischen Flussdichte entlang der Spulenachse. Im mittleren Teil der Spule kann sehr wohl von einem annähernd konstanten Magnetfeld ausgegangen werden, was durch die waagrechte rote Ausgleichsline in Abb. 2 verdeutlicht wird. Die gemessene Flussdichte passt mit etwa  $(1,1 \pm 0,2)$  mT gut mit dem nach der Formel

$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$  berechneten Wert<sup>1</sup> von  $(1,00 \pm 0,06)$  mT überein. Die zu beobachtenden Schwankungen in den Messwerten der magnetischen Flussdichte werden mit 0,2 mT abgeschätzt. Innerhalb der letzten 10 cm in der Spule ist jedoch ein starker Abfall der Flussdichte zu erkennen, der sich etwa 15 cm außerhalb der Spule fortsetzt. Am Ende der Drahtwicklungen, gekennzeichnet mit der senkrechten, gestrichelten Linie in Abb. 2, ist die magnetische Flussdichte fast exakt auf die Hälfte des durchschnittlichen Werts des mittleren Spulenbereichs, gekennzeichnet durch die waagrechte gestrichelte Linie in Abb. 2, abgefallen. Das bedeutet, dass nur im inneren Bereich der Spule, der bei den gewählten Spulenabmessungen etwa 70 % der Spulenlänge ausmacht, von einem in axialer Richtung konstanten Magnetfeld ausgegangen werden kann.

Der Versuchsaufbau zur Messung des Magnetfelds quer zur Spulenachse ist in Abb. 3 dargestellt. Mit einer tangentialen Hall-Sonde wird die magnetische Flussdichte durch eine Öffnung in der Mitte der langgestreckten Spule entlang des Spulendurchmessers bestimmt. Als Nullpunkt der Ortsmessung ist hier der vordere Spulenrand festgelegt.

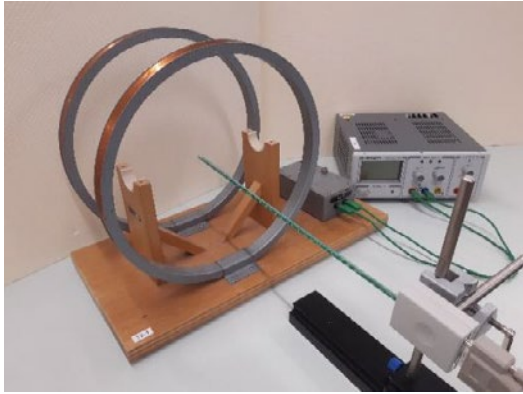
Abb. 4 zeigt den Verlauf der magnetischen Flussdichte quer zur Spulenachse. Am Rand der Spule beträgt die magnetische Flussdichte schon ca. 60 % des Maximalwerts, der bei einem Spulendurchmesser von 12 cm schon etwa 2 cm vom Rand entfernt erreicht wird. Auch hier kann aufgrund der begrenzten Länge der Hall-Sonde erst am gegenüberliegenden Rand der Spule mit der Messung begonnen werden. Im Inneren der Spule ist die magnetische Flussdichte nahezu konstant und erreicht auf ca. 0,1 mT genau auch den Wert der axialen Messung. Außerhalb der Spule fällt das Magnetfeld in radialer Richtung schnell auf einer Strecke von etwa 2 cm auf vernachlässigenden Betrag ab.

Beide Messungen zusammengekommen zeigen somit, dass das Magnetfeld innerhalb einer langgestreckten Spule sowohl in axialer Richtung als auch quer hierzu als nahezu konstant angenommen werden kann, sofern die Randbereiche außen vor bleiben.



**Abb. 4:** Magnetische Flussdichte der langgestreckten Spule entlang des Spulendurchmessers in der Spulenmitte. Die gestrichelten Linien geben die Grenzen der Spulen auf ca. 2 mm genau an.

<sup>1</sup> ausführliche Berechnung der Messunsicherheit im Anhang



**Abb. 5:** Prinzipieller Aufbau der Messung der magnetischen Flussdichte in axialer Richtung bei einem Helmholtz-Spulenpaar.

Hinweis: Der leichte Rückgang der magnetischen Flussdichte in der Spulenmitte stellt kein Messartefakt dar, sondern tritt auch beim als Alternative vorgestellten Helmholtz-Spulenpaar auf und lässt sich aus dem Biot-Savart-Gesetz ableiten. Visualisieren lässt sich dieser Sachverhalt z. B. mit <https://www.falstad.com/vector3dm/>

### Alternative: Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares

Alternativ kann auch das Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares genauer untersucht werden. Auch hierzu sind Messungen in axialer Richtung anzustellen. Abb. 5 zeigt den prinzipiellen Aufbau mit axialer Hall-Sonde. Jede der beiden Spulen besitzt 130 Windungen bei einem Durchmesser von  $(30,0 \pm 0,2)$  cm. Die Breite einer jeden Spule ist  $(2,0 \pm 0,1)$  cm, der Abstand der äußeren Spulenränder in axialer Richtung  $(17,1 \pm 0,3)$  cm.

Bei einer Stromstärke von  $(4,0 \pm 0,2)$  A in beiden Helmholtz-Spulen ergibt sich eine gemessene magnetische Flussdichte von  $(3,8 \pm 0,2)$  mT im Zentrum beider Spulen. Dies liegt im gleichen Bereich wie der mit der theoretischen Beziehung<sup>2</sup>  $B = \mu_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{N \cdot I}{R}$  mit Windungsanzahl N einer Spule, Stromstärke I und Spulenradius R erhaltene Wert<sup>3</sup> von  $(3,12 \pm 0,22)$  mT.

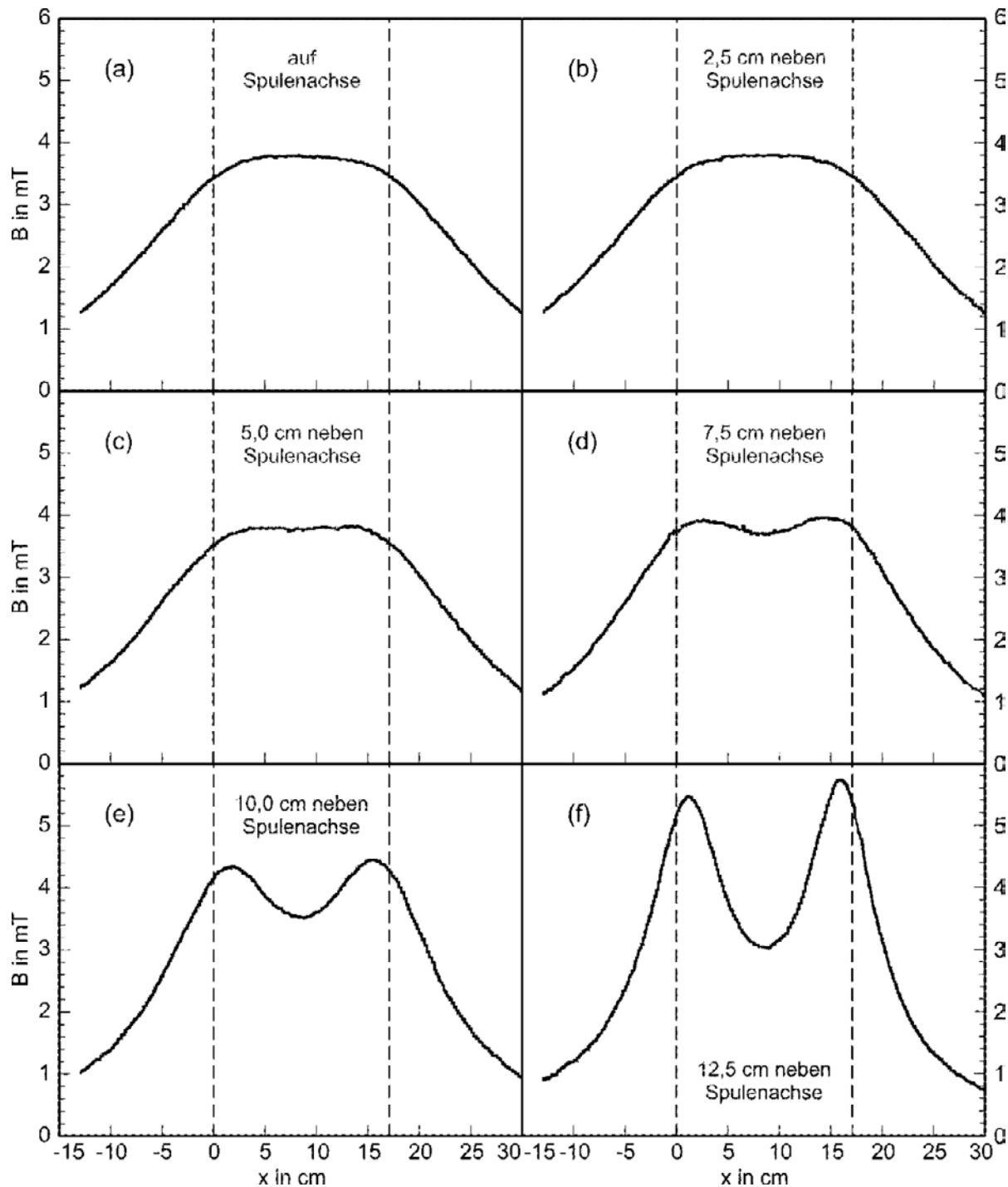
Die Homogenität des Magnetfelds wird durch mehrere Messungen in axialer Richtung x für unterschiedliche Abstände r von der Spulenachse überprüft. Abb. 6 zeigt die Messungen der magnetischen Flussdichte in axialer Richtung, Abb. 7 schematisch die Lage der Messkurven im Spulenpaar. Nur im Zentrum des Spulenpaares ist die Homogenität des Magnetfelds in einem Raumbereich mit einem Durchmesser von etwas mehr als 10 cm gewährleistet (siehe Abb. 6 a – c). Ab einer Entfernung im Bereich des halben Radius sind größere Schwankungen zu erwarten (siehe Abb. 6 d – e). Je größer der Abstand von der Spulenachse, desto geringer wird die magnetische Flussdichte in der Ebene zwischen beiden Spulenebenen, wohingegen ihr Wert in der Nähe der beiden Spulen signifikant ansteigt.

Diesen begrenzten Homogenitätsbereich innerhalb des Spulenpaares bestätigt auch die Messung entlang der Linie des Durchmessers in der Ebene in der Mitte zwischen beiden Spulen (siehe Abb. 8). Der Nullpunkt der Ortsmessung ist der innere Rand der Spule. Der

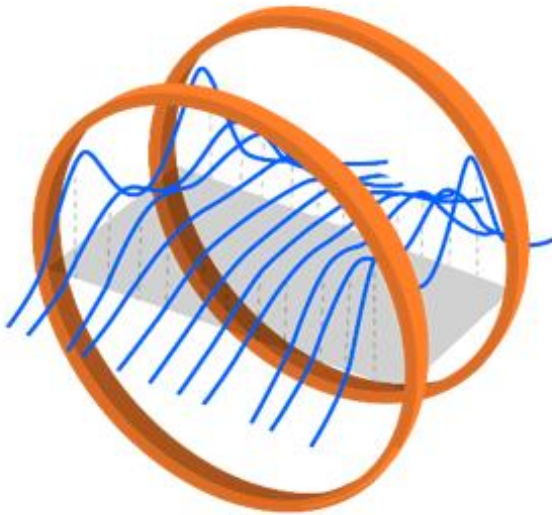
<sup>2</sup> zur Helmholtz-Bedingung siehe z. B. Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 2, Berlin, Springer, 1995, S. 86

<sup>3</sup> ausführliche Berechnung der Messunsicherheit im Anhang

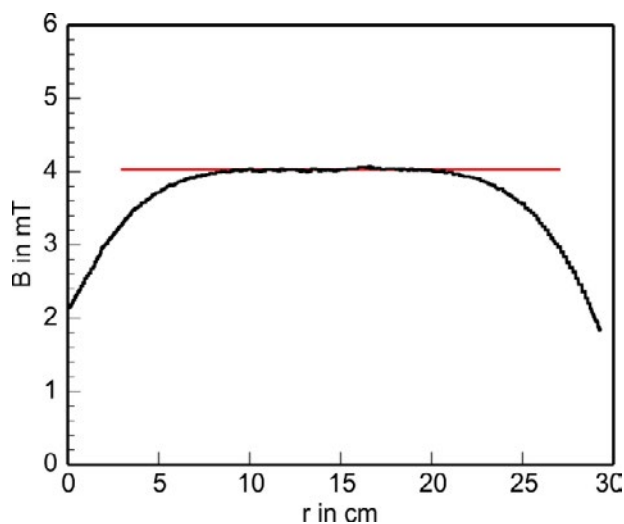
Bereich konstanter Flussdichte erstreckt sich auch hier etwa über 13 cm, verdeutlicht durch die rote Gerade.



**Abb. 6:** Gemessene magnetische Flussdichte im Innern des Helmholtz-Spulenpaars in axialer Richtung bei  $I = 4,0$  A: a) Messung genau entlang der Spulenachse. Die folgenden Messungen erfolgen parallel zur Spulenachse in einem Abstand von b)  $r = 2,5$  cm, c)  $r = 5,0$  cm, d)  $r = 7,5$  cm, e)  $r = 10,0$  cm und f)  $r = 12,5$  cm. Die gestrichelten Linien geben jeweils den äußeren Rand der beiden Spulen an.



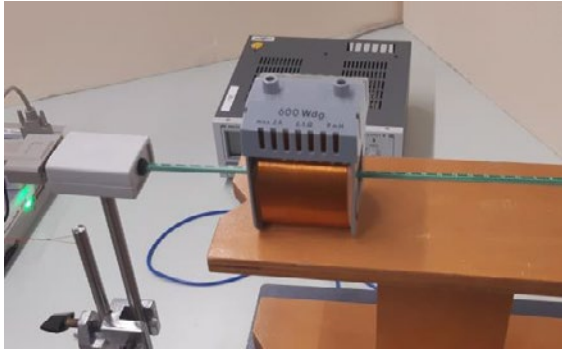
**Abb. 7:** Lage der in Abb. 6 dargestellten Messkurven im Inneren des Helmholtz-Spulenpaars. Die graue Ebene liegt auf Höhe der Spulenachse und gibt den Bereich zwischen den äußeren seitlichen Rändern der beiden Spulen an.



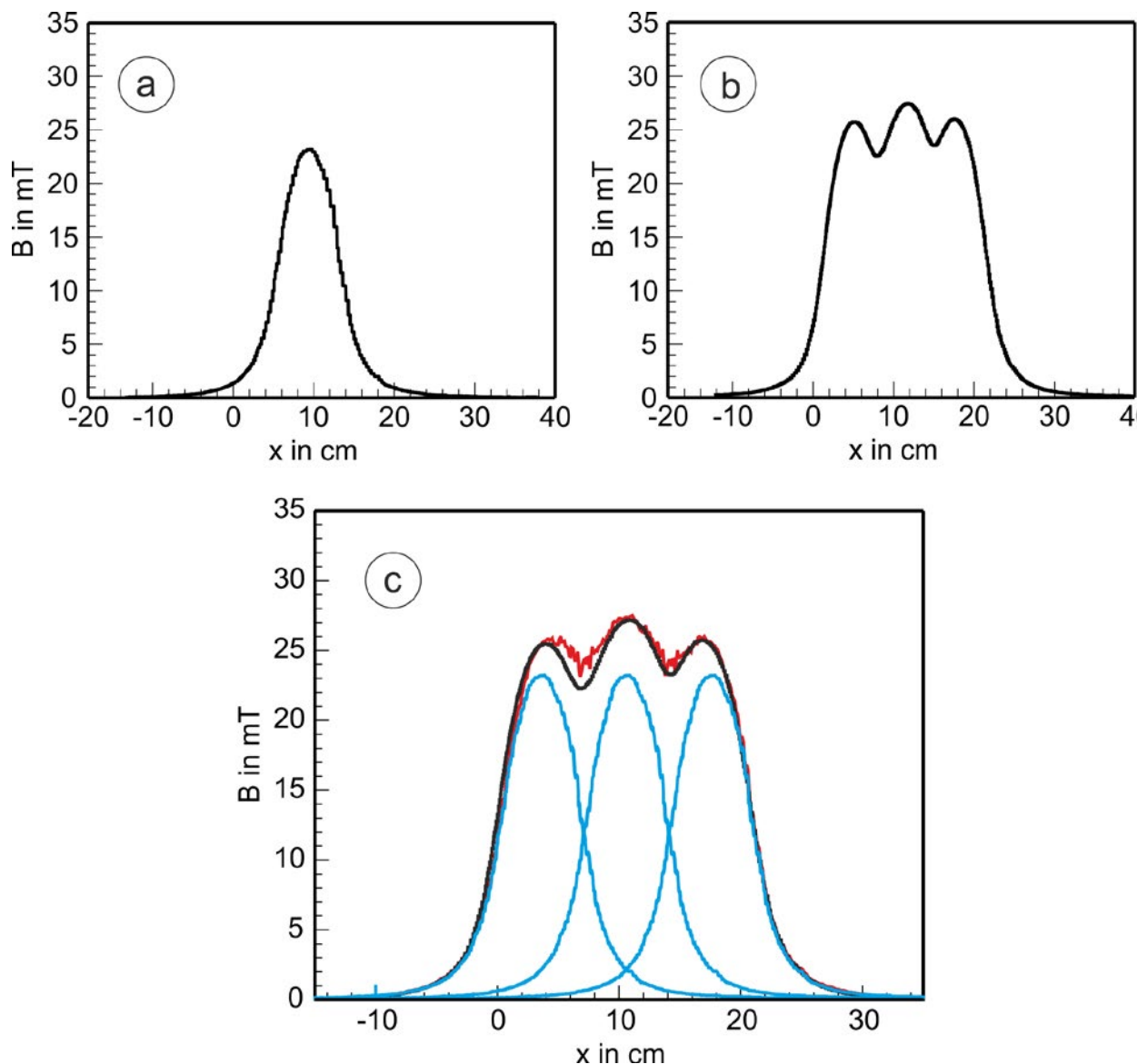
**Abb. 8:** Magnetische Flussdichte entlang der Linie des Durchmessers in der Ebene zwischen beiden Spulen des Helmholtz-Spulenpaars bei  $I = 4,0$  A. Die waagrechte rote Gerade verdeutlicht die konstante Flussdichte über einen weiten Bereich.

## 2. Magnetfeld kurzer Spulen

Die Überlagerung von Magnetfeldern wird mithilfe kurzer Spulen untersucht. Dazu wird zunächst die magnetische Flussdichte einer kurzen Spule (hier 600 Windungen) entlang der Spulenachse mit der axialen Hall-Sonde gemessen (siehe Abb. 9). Die Ortmessung erfolgt wie in Abschnitt 1 mit dem Bewegungssensor. Für die spätere Überlagerung empfiehlt es sich, äquidistante Messpunkte zu wählen. Anschließend werden drei dieser Spulen hintereinander angeordnet, so dass eine „langgestreckte“ Spule entsteht, deren Magnetfeld mit dem einer einzelnen Spule verglichen wird.



**Abb. 9:** Messaufbau zur Bestimmung der magnetischen Flussdichte einer kurzen bzw. einer aus kurzen Spulen gebildete „langgestreckte“ Spule entlang der Spulenachse.



**Abb. 10:** Magnetische Flussdichten (a) einer kurzen Spule, (b) drei hintereinander angeordneten kurzen Spulen jeweils entlang der Spulenachse. (c) Vergleich der Flussdichten dreier einzelner Spulen (blau) ohne Beeinflussung durch andere Spulen, der resultierenden Gesamtflussdichte dreier hintereinander angeordneten Spulen (schwarz) sowie rot dargestellt die Summe aus drei Einzelmessungen, jeweils um die Spulenbreite von 7,2 cm versetzt.

Abb. 10 a und b zeigen die magnetischen Flussdichten bei einer Stromstärke von  $(2,0 \pm 0,1)$  A entlang der Spulenachse für eine Spule bzw. drei hintereinander angeordneten Spulen. Der Nullpunkt der Ortsmessung ist jeweils der hintere Rand der Spule. Die Spulengehäuse sind jeweils  $(7,2 \pm 0,1)$  cm lang, wobei die Breite der Drahtwicklung nur  $(6,4 \pm 0,1)$  cm misst. Damit ergibt sich zwischen den aneinandergereihten Spulen eine Lücke von  $(0,8 \pm 0,2)$  cm, was zu deutlichen Einbrüchen der magnetischen Flussdichte in Abb. 10 b führt. Somit unterscheidet sich diese doch deutlich von der einer homogen gewickelten langgestreckten Spule.

Abb. 10 c stellt die additive Überlagerung der magnetischen Flussdichten von drei einzelnen kurzen Spulen zu einem Gesamtfeld dar. Dazu vergleicht sie die Messung des Gesamtfelds der drei hintereinander angeordneten Spulen (schwarz dargestellt) mit der Messung an drei kurzen Spulen, die jeweils um die Spulenlänge versetzt sind (blau dargestellt). Rot dargestellt ist die Addition der blauen Kurven, die eine Einzelmessung an jeweils einer Spule darstellen, wobei die Ortskoordinaten des Datensatzes einmal nicht, das andere beide Mal um die Länge einer Spule (7,2 cm) in die eine bzw. andere Richtung verschoben und so der Anordnung der drei Spulen hintereinander angepasst wurden. Bis auf die kleinere Diskrepanz am Zusammenstoß der ersten und zweiten Spule ist eine sehr gute Übereinstimmung der Messung mit der berechneten Kurve zu erkennen, was die additive Überlagerung der magnetischen Flussdichten bestätigt. Um die rechnerische Verschiebung der Ortskoordinaten und die anschließende Addition der magnetischen Flussdichten z. B. mittels Tabellenkalkulation durchführen zu können, empfiehlt es sich, auf äquidistante Schrittweiten der Ortskoordinaten (z. B. 0,5 cm-Schritte) zu achten.

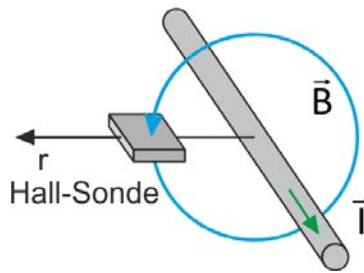
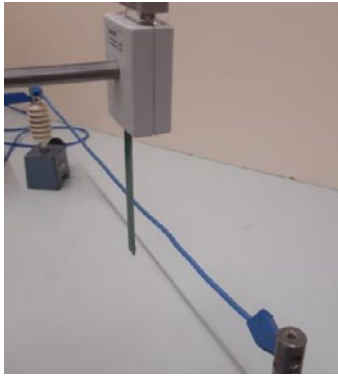
Eine Alternative hierzu kann sein, die drei Spulen in einer Reihe zu platzieren, nur durch jeweils eine der drei Spule Strom fließen zu lassen und die magnetische Flussdichte orts aufgelöst zu messen. Die so erhaltenen Messwerte lassen sich anschließend addieren. Hierdurch kann auf die sonst erforderliche Verschiebung der Ortskoordinaten verzichtet werden.

### 3. Radiales Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahts

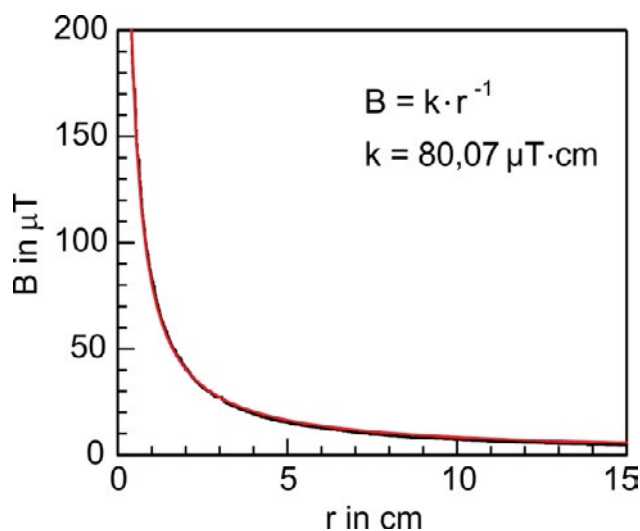
Die Abnahme der durch einen mit konstantem Strom durchflossenen Drahts erzeugten magnetischen Flussdichte mit zunehmendem Abstand vom Draht wird im dritten Versuchsteil untersucht. Erwartet wird eine Abnahme indirekt proportional zum Abstand von der Drahtmitte entsprechend der Beziehung

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}, \quad (1)$$

wobei  $r$  der Abstand vom Draht, sofern dessen Durchmesser vernachlässigbar klein ist, und  $I$  die Stromstärke angibt. Dieses radiale Verhalten soll in diesem Versuchsteil verifiziert werden. Die Erweiterung dieser Betrachtung hin zur bis 2019 gültigen Definition der Einheit Ampere stellt eine Erweiterungsmöglichkeit dar, die jedoch hier nicht weiterverfolgt wird.



**Abb. 11:** Positionierung der axialen Hall-Sonde zum stromdurchflossenen Draht. Die sensitive Fläche der Sonde ist an der Unterseite und liegt sowohl parallel zum Draht als auch zur Tischoberfläche. Rechts ist die Positionierung der Hallsonde zum Draht sowie deren Bewegung schematisch dargestellt.



**Abb. 12:** Gemessene magnetische Flussdichte in Abhängigkeit des Drahtabstands (schwarze Kurve). Der nach der theoretischen Abhängigkeit angepasste Funktionsverlauf ist rot dargestellt und korrespondiert gut mit den Messwerten.

Der Aufbau des Experiments ist in Abb. 11 dargestellt. Zur Messung der magnetischen Flussdichte wird eine axiale Hall-Sonde verwendet. Die sensitive Fläche der Hall-Sonde ist auf Höhe des mit  $(4,0 \pm 0,2)$  A stromdurchflossenen Drahts und parallel zur Tischoberfläche ausgerichtet. Während der Messung wird die Sonde auf gleicher Höhe bleibend vom Draht entfernt, der Ort wiederum mit dem Bewegungssensor bestimmt und die magnetische Flussdichte als Funktion des Abstands  $r$  der Sonde vom Drahtmittelpunkt gemessen.

Die deutliche Abnahme der magnetischen Flussdichte mit zunehmendem Abstand der Hall-Sonde vom Draht ist in Abb. 12 dargestellt. Der Nullpunkt der Ortsmessung ist dabei die Drahtmitte. Die indirekte Proportionalität nach Gleichung (1) zwischen magnetischer Flussdichte  $B$  und Abstand  $r$  wird durch die Anpassung der rot dargestellten Funktion  $B = k \cdot r^{-1}$  an die Messwerte bestätigt. Deren Graph deckt sich genau mit den Messwerten, was die zu untersuchende Abhängigkeit gut verifiziert. Aus dem durch Anpassung erhaltenen Wert  $80,07 \mu\text{T} \cdot \text{cm}$  für die Konstante  $k$  lässt sich nach Gleichung (1) exakt die eingestellte Stromstärke von  $4,0$  A bestätigen.

## Vorschlag eines möglichen Arbeitsblatts

### Vorbereitung:

#### Physikalische Grundlagen

- magnetische Flussdichte  $B$
- Magnetfeld unendlich langer Spulen (einschließlich Beziehung für  $B$ )
- Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters (einschließlich Formel der radialen Abhängigkeit für  $B$ )
- Hall-Effekt und Funktionsweise einer Hall-Sonde
- (alternativ: Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaars; hier nicht weiter ausgeführt)

#### Vorbereitende Hausaufgabe

Fertige eine Skizze des Versuchsaufbaus zur Messung des Magnetfelds eines stromdurchflossenen Leiters in radialer Richtung an. Diese soll insbesondere die Orientierung der Hallsonde und ihre Bewegungsrichtung bei der Messung darstellen.

#### Literatur

- Grehn, Krause: Metzler Physik, 5. Auflage, Braunschweig, 2020, Westermann-Verlag, Abschnitte 6.1.2, 6.1.6 und 6.2.1
- Tipler: Physik, Heidelberg, 1995, Spektrum Akademischer Verlag, Abschnitt 24.1

#### Benötigte Geräte

- Elektrizitätsquelle Voltcraft HPS-16010, Restwelligkeit  $< 5 \%$
- Hall-Sonde axial und tangential,  $\pm 1 \text{ T}$ , LD 524 0381
- Hall-Sonde axial,  $\pm 1 \text{ T}$ , LD 524 0382
- Hall-Sonde axial,  $\pm 0,3 \text{ mT}$ , LD 524 0383
- Cassy-Messinterface mit Software CassyLab2
- lange Spule,  $2 \times 30 \text{ cm}$ , LD 516 22
- 3 Experimentierspulen, 600 Windungen
- 2 Isolatoren mit stramm gespanntem Kabel dazwischen
- Stativmaterial
- Maßstab

## Anleitung:

### 1. Teil: Magnetfeld einer langen Spule

Die magnetische Flussdichte einer langen, von einem Gleichstrom durchflossenen Spule ist sowohl in axialer Richtung sowie quer zur Spulenachse zu bestimmen und graphisch darzustellen. Der Bereich, in dem die Messungen durchgeführt werden sollen, sowie die Schrittweite zwischen zwei Messpunkten ist zu überlegen und mit der Lehrkraft abzustimmen.

#### Durchführung

- lange Spule mit 2x 30 Windungen
- Stromstärke in der Spule: 2,0 A
- Wahl des Nullpunkts der Ortsmessung
- Messung in axialer Richtung mit axialer Sonde 1 T
- Messung quer zur Spulenachse mit tangentialer Sonde 1 T

#### Auswertung

- Darstellung der Messungen in einem Diagramm.
- Identifikation homogener Bereiche.
- Berechnung der magnetischen Flussdichte einschließlich der Messunsicherheit durch Fortpflanzung der Messunsicherheiten der eingestellten Größen sowie Vergleich mit der Messung.
- Hinweis: Konstanten und abzählbare Größen wie  $\mu_0$  und  $N$  sind frei von Messunsicherheiten. Die Messunsicherheiten von  $I$  und  $\ell$  müssen bestimmt werden.

### 2. Teil: Magnetfeld kurzer Spulen

Das Magnetfeld kurzer Spulen wird nach dem Verfahren von Teil 1 längs der Spulenachse bestimmt. Beginne und ende mit der Messung jeweils etwa 5 cm außerhalb der Spule(n). Zunächst wird das Magnetfeld einer einzelnen Spule bestimmt, anschließend das von drei in Reihe angeordneter Spulen bei gleicher Stromstärke. Es ist zu überprüfen, ob sich das Magnetfeld der drei Spulen durch dreimalige Überlagerung des Felds der einen Spule darstellen lässt.

#### Durchführung

- 3 kurze Spulen mit 600 Windungen
- Stromstärke in der Spule: 2,0 A
- Messung entlang der Spulenachse mit axialer Sonde 1 T
- Messung in äquidistanten Schritten
- Beginn und Ende jeweils 5 cm außerhalb der Spule(n)
- Messung an einzelner Spule

- Messung an drei in Reihe und ohne Zwischenraum angeordneter Spulen. Beachte, dass die Spulen gleichsinnig vom Strom durchflossen werden und damit ihr jeweiliges Magnetfeld in die gleiche Richtung zeigt.

#### Auswertung

- Darstellung der beiden Messungen in einem gemeinsamen Diagramm
- Anpassung der Einzelmessung an die Messung mit drei Spulen durch dreifache Überlagerung (Addition) in einem weiteren Diagramm

### 3. Teil: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Ein stromdurchflossener Draht wird zwischen zwei Befestigungspunkten stramm gespannt und das ihn umgebende Magnetfeld in Abhängigkeit des Abstands  $r$  vom Draht gemessen. Überlege dir vor Beginn der Messung wie die magnetischen Feldlinien bei einem stromdurchflossenen Draht verlaufen und orientiere die Hall-Sonde so, dass die Feldlinien senkrecht auf die sensitive Fläche des Hall-Sensors auftreffen.

#### Durchführung

- Stromstärke im Draht: 4,0 A
- Messung radial zum Draht mit axialer Sonde 0,3 mT
- Nullpunkt der Entfernungsmessung ist Drahtmitte
- in geringer Entfernung zum Draht mit kleinerer Schrittweite messen

#### Auswertung

- Darstellung der Messung in einem Diagramm
- Überprüfe die radiale Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte durch Anpassung der theoretischen Abhängigkeit  $B(r) = k \cdot \frac{1}{r}$  an die Messwerte oder durch eine Ursprungsgerade bei geeigneter Auftragung. Vergleiche  $k$  mit dem bei der eingestellten Stromstärke theoretisch erwarteten Wert.

## Anhang: Berechnung der Messunsicherheiten

### Lange Spule

Die Größen der Formel  $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l}$  sind wie folgt mit Unsicherheiten behaftet:

$I = (2,0 \pm 0,1) \text{ A}$ ,  $l = (60,5 \pm 0,5) \text{ cm}$ ; die Größen  $\mu_0$  und  $N$  werden ohne Unsicherheit angenommen.

Für die magnetische Flussdichte ergibt sich

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{240 \cdot 2,0 \text{ A}}{0,605 \text{ m}} = 1,00 \text{ mT}$$

Die Messunsicherheit  $\Delta B$  der magnetischen Flussdichte lässt sich aus der relativen Messunsicherheit  $\gamma_B = \frac{\Delta B}{B}$  bestimmen, die gleich der Summe der relativen Messunsicherheiten der mit Unsicherheiten behafteten Eingangsgrößen  $I$  und  $l$  ergibt:

$$\gamma_B = \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,1}{2,0} + \frac{0,5}{60,5} = 0,058.$$

Damit ergibt sich für die Unsicherheit der magnetischen Flussdichte

$$\Delta B = B \cdot \gamma_B = 1,00 \text{ mT} \cdot 0,058 = 0,058 \text{ mT}$$

und damit für die mit Unsicherheiten belegte magnetische Flussdichte  $B = (1,00 \pm 0,06) \text{ mT}$ .

### Helmholtz-Spulenpaar

Die Berechnung der Unsicherheiten erfolgt hier analog der langen Spule. Die in die Beziehung

$B = \mu_0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{N \cdot I}{R}$  eingehenden Größen  $\mu_0$  und  $N$  werden wieder ohne Unsicherheiten angenommen. Die Stromstärke beträgt  $I = (4,0 \pm 0,2) \text{ A}$ . Bei einem idealen Helmholtz-Spulenpaar steht  $R$  sowohl für den Radius beider Spulen als auch für ihren mittleren Abstand. Da bei letzterem die Messunsicherheit mit  $0,3 \text{ cm}$  überwiegt, wird dieser Wert in der weiteren Berechnung verwendet, so dass gilt:  $R = (15,0 \pm 0,3) \text{ cm}$ .

Somit ergibt sich für die relative Messunsicherheit der magnetischen Flussdichte

$$\gamma_B = \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} = \frac{0,2}{4,0} + \frac{0,3}{15,0} = 0,070$$

und damit für die magnetische Flussdichte  $B = (3,12 \pm 0,22) \text{ mT}$ .



*Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden*

## 2.4 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Induktion und Selbstinduktion

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Digitales Messwerterfassungssystem für Spannungen (z. B. Sensor-Cassy 2, PASCO-Spannungssensoren)</li> <li>• Spule mit <math>N = 1000</math>, <math>R_L = 9,5 \Omega</math>, <math>L = 0,044 \text{ H}</math></li> <li>• Widerstände <math>R_{E1} = 10 \Omega</math>, <math>R_{E2} = 22 \Omega</math>, <math>R_{E3} = 33 \Omega</math></li> <li>• U-förmiger Eisenkern mit Joch</li> <li>• Kippschalter An-Aus</li> <li>• Steckplatte, Steckverbindungen</li> </ul>
Digitales Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <a href="https://www.elektroniktutor.de/analogtechnik/l_gleich.html">https://www.elektroniktutor.de/analogtechnik/l_gleich.html</a></li> <li>• Leifi-Simulation Kurvenverlauf: <a href="https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/elektromagnetische-induktion/grundwissen/ein-und-ausschalten-von-rl-kreisen">https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/elektromagnetische-induktion/grundwissen/ein-und-ausschalten-von-rl-kreisen</a></li> <li>• Qr-Lernhilfen.csv Datei zum Abändern der Hilfen</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 4 Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler planen Experimente zum Ein- und Ausschaltvorgang von Spulen, in denen sie unter sach- und zielgerichteter Handhabung digitaler Werkzeuge den Einfluss des Ohm'schen Widerstands und der Induktivität auf die induzierte Spannung untersuchen. Im Rahmen der Auswertung analysieren sie die Maximalwerte der Induktionsspannung und stellen einen Bezug zur Änderung des magnetischen Flusses her.

### Ziel

Wir betrachten den Ein- und Ausschaltvorgang des elektrischen Stroms durch eine Spule und variieren dabei den verwendeten Vorwiderstand (Einschaltvorgang) bzw. Entladewiderstand (Ausschaltvorgang) sowie die Induktivität der verwendeten Spule. Beobachtet wird dabei jeweils der Maximalwert der Induktionsspannung und die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$ , die angibt, wie schnell die den Spannungsverlauf beschreibenden Exponentialkurven  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  abklingen. Im Folgenden ist

- $U_{Bat}$  die Spannung der verwendeten Batterie,
- $U_i$  die Induktionsspannung,
- $U_{RL}$  die am Innenwiderstand  $R_L$  der realen Spule abfallende Spannung,

- $U_L$  die an der Spule messbare Spannung.
- $R_E$  wird als Symbol sowohl für den Vorwiderstand (Einschaltvorgang) als auch den Entladewiderstand (Ausschaltvorgang) verwendet und
- $R = R_L + R_E$  ist der Gesamtwiderstand der Schaltung.

Folgende Erkenntnisse sollen herausgearbeitet werden:

Die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$  mit dem Gesamtwiderstand  $R = R_E + R_L$  hängt sowohl beim Ein- als auch beim Ausschalten von L und R ab. Je größer L und je kleiner R, desto langsamer fallen die Exponentialkurven  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  ab.

Beim Einschalten ist der Maximalwert der Induktionsspannung unabhängig vom Widerstand und der Induktivität immer  $-U_{\text{Batterie}}$ . Beim Ausschalten hängt der Maximalwert der Induktionsspannung  $U_i = \left(1 + \frac{R_E}{R_L}\right) \cdot U_{\text{Bat}}$  vom Entladewiderstand, nicht aber von der Induktivität ab. Je größer der Entladewiderstand, desto größer ist die maximale Induktionsspannung.

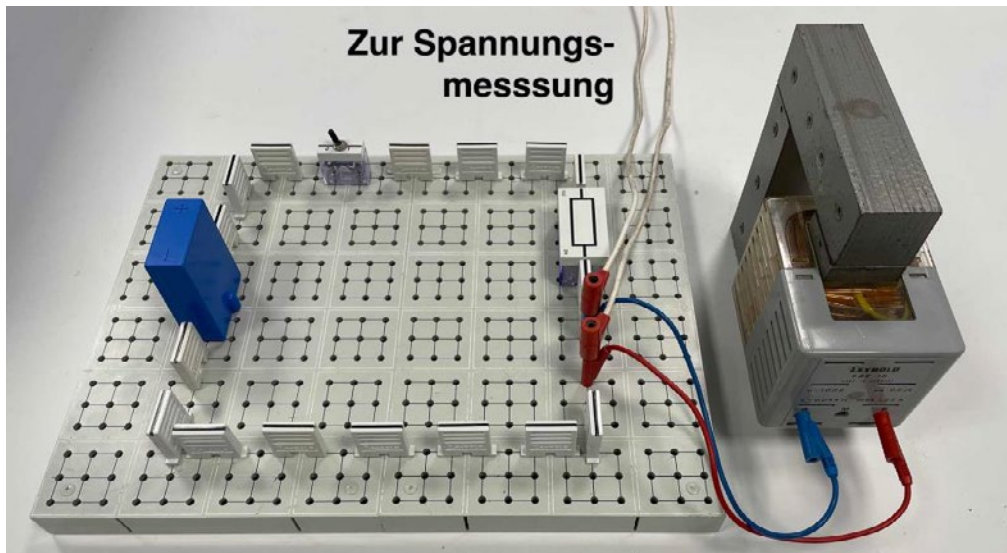
Die Tabelle fasst die Erkenntnisse zusammen:

	Widerstand R		Induktivität L	
	Einfluss auf $\tau$	Einfluss auf $U_{i,\max}$	Einfluss auf $\tau$	Einfluss auf $U_{i,\max}$
Einschalten	$\tau = \frac{L}{R}$	Kein Einfluss	$\tau = \frac{L}{R}$	Kein Einfluss
Ausschalten	$\tau = \frac{L}{R}$	$U_i = \left(1 + \frac{R_E}{R_L}\right) \cdot U_{\text{Bat}}$	$\tau = \frac{L}{R}$	Kein Einfluss

## Aufbau

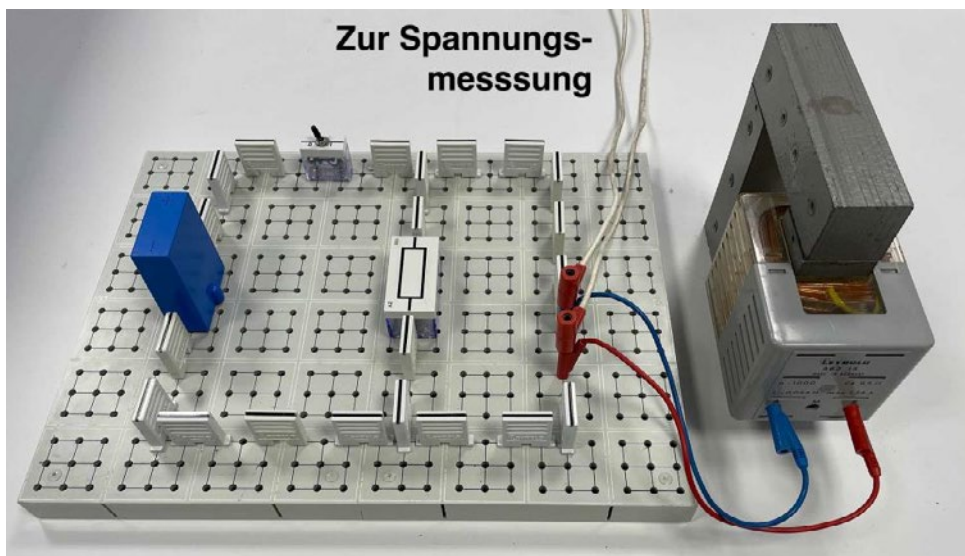
Die elektrischen Schaltungen zur Messung der jeweiligen Induktionsspannungen zeigen Abb. 1 und 2. Die Herausforderung bei der Auswahl der Bauteile liegt darin, dass Spule und Widerstand so dimensioniert sein müssen, dass die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$  möglichst groß ist. Dies kann mit klassischen Spulen erreicht werden, indem man sie auf einen U-förmigen Eisenkern steckt und diesen mit dem Joch verschließt. Durch ein Verschieben des Jochs kann auch die Induktivität bei gleichem Innenwiderstand der Spule variiert werden.

Es bieten sich zwei verschiedene Aufbauten jeweils für den Ein- und Ausschaltvorgang an. Beim Einschaltvorgang werden Spule und Widerstand in Reihe geschaltet.



**Abb. 1:** Einschaltvorgang: Aufbau des RL-Glieds beim Ladevorgang.

Aufbauten mit Wechselschaltern führen oftmals zu ungewünschten Spannungspikes beim Umschalten, deswegen wird ein Ein-Aus-Schalter verwendet. Ebenfalls empfehlenswert ist die Verwendung einer Batterie als Gleichspannungsquelle. Beim Ausschaltvorgang muss die in der Spule gespeicherte Energie über den Widerstand abfließen können, was durch eine Parallelschaltung des Entladewiderstands mit der Spule erreicht werden kann.



**Abb. 2:** Beim Ausschalten muss der Widerstand parallelgeschaltet werden, damit ein kreisförmiger Stromfluss von der Spule über den Widerstand möglich ist.

### Vorüberlegung zum Vorzeichen der Spannungen beim Einschalten

Vor Beginn des Experiments lohnt sich eine Betrachtung der Vorzeichen der zu messenden Spannungen. Grundsätzlich gilt, dass eine reale Spule mit nicht vernachlässigbarem Innenwiderstand bei Änderungen des magnetischen Flusses in ihr als Reihenschaltung aus Innenwiderstand und elektrischer Quelle gesehen werden kann:



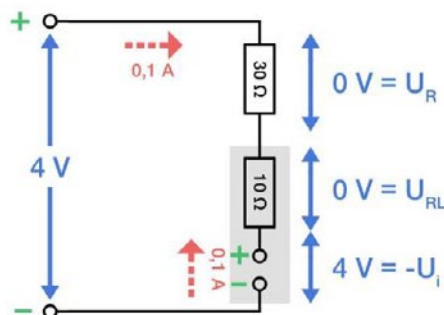
**Abb. 3:** Eine reale Spule fassen wir als Reihenschaltung aus elektrischer Quelle und Innenwiderstand auf.

Real messen können wir nur die Summe  $U_L$  aus der Spannung der elektrischen Quelle und der am Innenwiderstand  $R_L$  abfallenden Spannung  $U_{RL}$ . Die Spannung der elektrischen Quelle der Spule wird durch die Induktionsspannung  $U_i$  hervorgerufen. Da z. B. beim Einschalten die Induktionsspannung ein negatives Vorzeichen hat, die insgesamt an der Spule gemessene Spannung aber positiv ist, gilt folgender Zusammenhang:

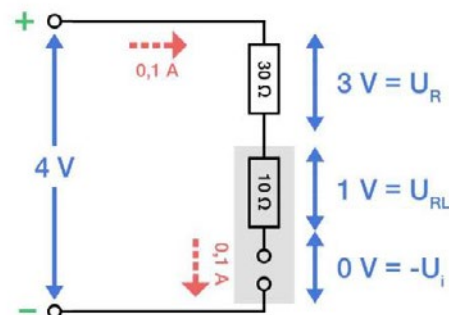
$$U_L = U_{RL} - U_i$$

Im Schülerexperiment kann die Induktionsspannung  $U_i$  nie direkt gemessen werden. Stattdessen muss sie sich aus der real zu messenden Spannung  $U_L$  der Spule erschlossen werden. Folgende Übersicht illustriert dabei das Vorzeichenverhalten für eine Spule mit Innenwiderstand  $R = 10 \Omega$  beim Einschalten.

Einschaltvorgang  $t = 0$



Einschaltvorgang  $t \rightarrow \infty$



**Abb. 4:** Beide Abbildungen zeigen den Einschaltvorgang. Links für  $t = 0$  im Moment als der Schalter geschlossen wurde und rechts für  $t \rightarrow \infty$ , also lange Zeit nach Schließen des Schalters.

In der linken Abbildung verhindert die Spule (grauer Kasten) den Stromfluss (mit rotem Pfeil eingetragen), indem sie einen gleichgroßen, entgegen gerichteten Stromfluss hervorbringen möchte. Die Induktionsspannung beträgt für diesen entgegen gerichteten Stromfluss  $U_i = -4 \text{ V}$ , die real an der Spule gemessene aber mit Hilfe obiger Formel  $U_L = 0 - (-4 \text{ V}) = +4 \text{ V}$ . Durch die eingezeichnete Polung erkennt man, dass alle Anschlüsse der Widerstände auf dem gleichen Potential liegen, was den Stromfluss verhindert. In der rechten Abbildung sieht man, dass die an der Spule messbare Spannung für  $t \rightarrow \infty$  aufgrund des konstanten Stromflusses und des Innenwiderstands  $U_L = 1 \text{ V} - 0 \text{ V} = +1 \text{ V}$  beträgt.

## Einschaltvorgang mit verschiedenen Widerständen

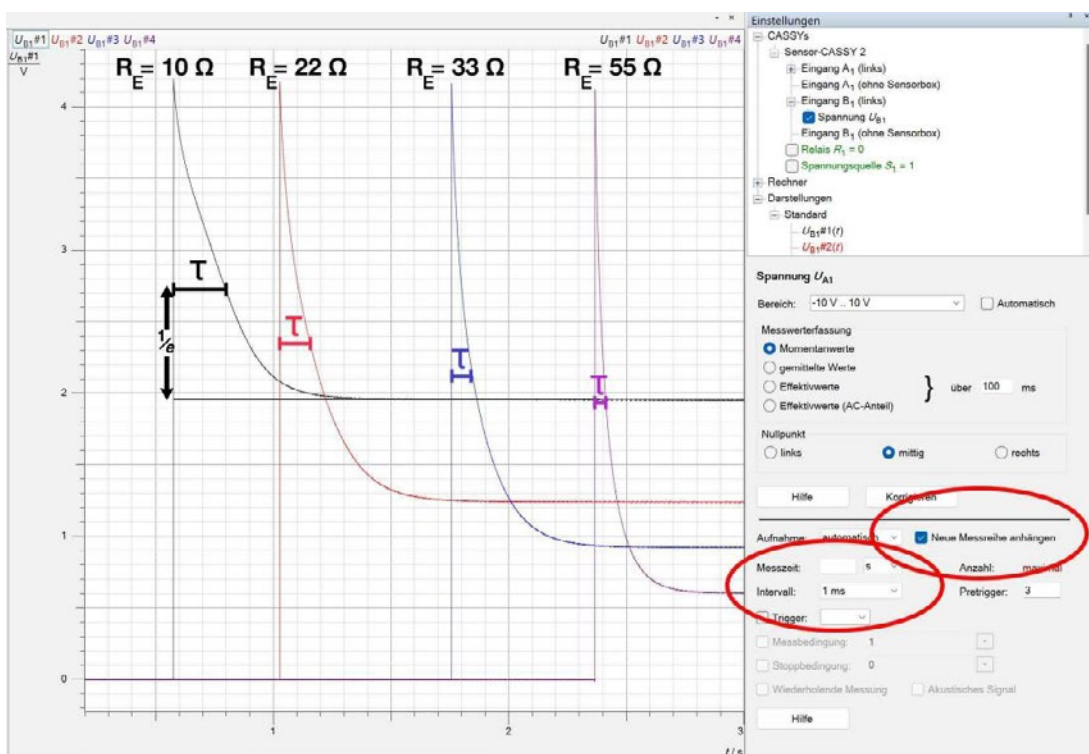
Beim Einschaltvorgang wird für verschiedene Vorwiderstände und Induktivitäten die Spannung  $U_L$  an der Spule gemessen. Aufgrund des Innenwiderstands können die aus der Literatur bekannten Kurven der Induktionsspannung, bei denen nach dem Einschaltvorgang ein Absinken auf den Spannungswert null beobachtet wird, nicht direkt an der Spule gemessen werden.

Es wird eine Spule mit 1000 Windungen und Innenwiderstand  $R_L = 9,5 \Omega$  verwendet. In der Abbildung gut zu erkennen ist, dass die Induktionsspannung zum Zeitpunkt des Einschaltens unabhängig vom verwendeten Vorwiderstand immer (betragsmäßig) gleich der Batteriespannung 4,2 V ist. Kleinere Abweichungen ergeben sich aufgrund der Abtastrate, da so manchmal der Peak knapp verpasst wird.

Ebenfalls zu erkennen ist der Einfluss des Widerstands auf die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$ , denn bei größeren Widerständen fällt die Kurve schneller ab.

Um  $\tau$  am Graphen abzulesen, zieht man gedanklich den Offset ab und misst die Zeitdauer, bis die Spannung auf den Wert  $\frac{1}{e} \cdot U_0$  abgefallen ist. Dies ist in der folgenden Abbildung eingezeichnet.

Nach dem Einschwingvorgang stellt sich an der Spule die aufgrund ihres Innenwiderstands abfallende, konstante Spannung ein. Beim schwarzen Graphen haben Spule und Vorwiderstand ungefähr den gleichen Widerstand. Deswegen fällt etwa die eine Hälfte der Batteriespannung für  $t \rightarrow \infty$  an der Spule und die andere am Vorwiderstand ab.



**Abb. 5:** Die Messung des Einschaltvorgangs wird jeweils für verschiedene Vorwiderstände  $R_E$  (10  $\Omega$  – 55  $\Omega$ ) von Hand leicht versetzt gestartet.

Wir interessieren uns in dieser Messung für den Einfluss des Ohm'schen Widerstands auf die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$  sowie auf die maximale Induktionsspannung. Für alle Messungen gilt  $R_L = 9,5 \, \Omega$  und  $R = R_E + R_L$ .

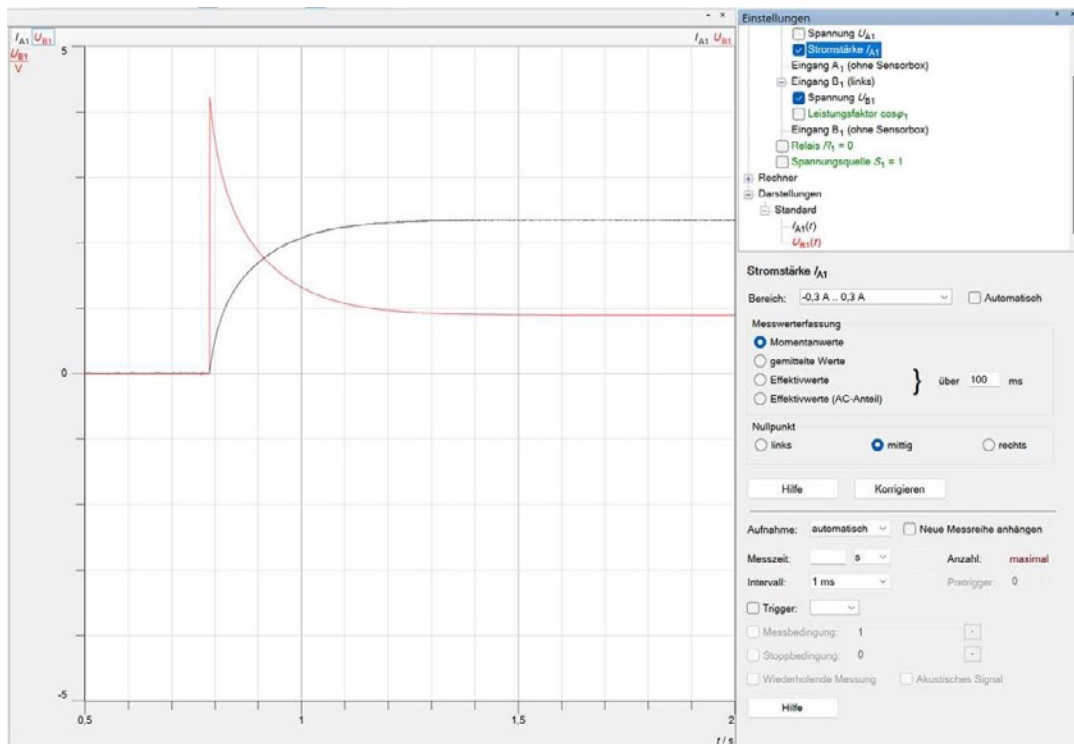
	$R_E = 10 \, \Omega$	$R_E = 22 \, \Omega$	$R_E = 33 \, \Omega$	$R_E = 55 \, \Omega$
$R$ in $\Omega$	19,5	31,5	42,5	64,5
$U_{i,max}$ in V	-4,20	-4,18	-4,16	-4,12
$\tau$ in s (am Graphen abgelesen)	0,29	0,17	0,11	0,06

Kleinere Abweichungen bei  $U_{i,max}$  lassen sich durch ein eventuell zu großes Messintervall erklären, da bei größeren Widerständen die Kurven sehr schnell abfallen und es möglich ist, dass das Messwerterfassungssystem den Moment der größten Induktionsspannung verpasst hat.

Anhand der Messung lässt sich die halbquantitative Aussage „je größer  $R$ , desto kleiner ist die Zeitkonstante  $\tau$ “ sowie die Aussage „der Widerstand  $R$  hat keine Auswirkung auf die maximale Induktionsspannung“ begründen.

Ignoriert man den schwarzen Graphen, dessen Verlauf augenscheinlich etwas von einem exponentiellen Abfallen abweicht, kann man die indirekte Proportionalität zwischen  $R$  und  $\tau$  sogar quantitativ bestätigen: Von der zweiten zur dritten Messung wächst der Widerstand um den Faktor 1,5, während  $\tau$  um den Faktor 1,5 abfällt. Analog erhält man von der dritten zur vierten Messung den Faktor 1,7 bei den Widerständen und 1,8 bei  $\tau$ .

Der vom Lehrplan geforderte Zusammenhang zwischen Induktionsspannung und magnetischem Fluss könnte hier folgendermaßen hergestellt werden: In der Messung haben wir gesehen, dass die Induktionsspannung zu Beginn maximal ist. Mit dem Induktionsgesetz folgt, dass damit auch die Änderung des magnetischen Flusses zu Beginn maximal sein muss. Dies kann durch eine Messung der Stromstärke verifiziert werden. Eine Änderung des magnetischen Flusses ist nämlich wegen  $\Phi = B \cdot A$  direkt proportional zur Änderung der magnetischen Flussdichte  $B$  (da die Fläche konstant ist). Unter der Annahme, dass hier wie bei der unendlich langen Spule ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen  $B$  und  $I$  herrscht, folgern wir unseren gewünschten Zusammenhang zur maximalen Steigung der Stromstärke zu Beginn der Messung.



**Abb. 6:** Rot ist der Verlauf der Spannung an der Spule, schwarz die der Stromstärke durch die Spule. Die Änderung der Stromstärke ist zu Beginn am größten, also ist auch die Änderung des magnetischen Flusses zu Beginn am größten. Das passt zum Maximalwert der Spannung, der zu Beginn sein Maximum hat.

## Einschaltvorgang mit verschiedenen Induktivitäten

Neben der Variation des Vorwiderstands lässt sich auch die Induktivität der Spule durch stückweises Entfernen des Eisenkerns verändern. Da wir durch den Eisenkern mit Joch die Induktivität der Spule um einen unbekannten Faktor  $\mu_r$  verändern, lassen sich in der Auswertung oft nur halbquantitative Aussagen treffen.

Vorteilhaft bei dieser Methode ist, dass sich dadurch der Innenwiderstand der Spule nicht ändert, was bei Verwendung verschiedener Spulen schwer umsetzbar gewesen wäre.

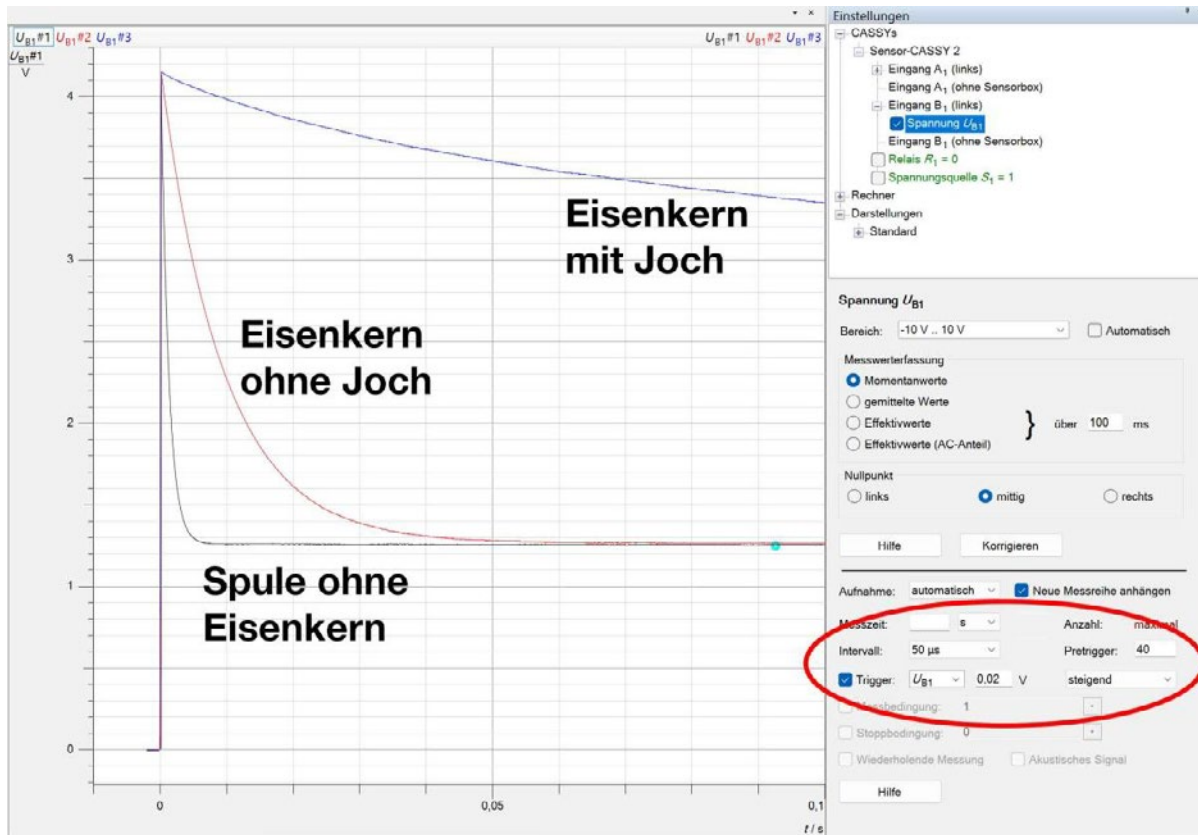
Man könnte zwar auf den ersten Blick aufgrund der Beziehung  $U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt}$  vermuten, dass die maximale Induktionsspannung von der Induktivität der Spule abhängt, allerdings gilt für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke in der Spule  $I(t) = \frac{U_{Bat}}{R_L} - \frac{U_{Bat}}{R_L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ , wobei  $R_L$  wie bisher den Innenwiderstand der Spule bezeichnet.

Damit folgt  $\frac{dI}{dt} = \frac{U_{Bat}}{L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ , womit sich die Induktivität in der Formel der Induktionsspannung herauskürzt. Demensprechend legt einzig die Batteriespannung die Induktionsspannung fest.

In der Messung gut zu beobachten ist der Einfluss der Induktivität auf die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$ . Je kleiner  $L$ , desto schneller sinkt die Induktionsspannung. Auf die maximale Induktionsspannung zum Zeitpunkt  $t = 0$  hat die Induktivität allerdings keinen Einfluss.

Der Bezug zur Änderung des magnetischen Flusses kann wie oben analog mittels des Stromstärkenverlaufs hergestellt werden.

Bei diesem Versuch wurde ein sehr kleines Messintervall von  $50 \mu\text{s}$  gewählt, um den Maximalwert der Spannung zu Beginn bei allen Messungen zu erwischen.



**Abb. 7:** Einschaltvorgang: Bei der Variation der Induktivität wurde ein Triggersignal verwendet, damit alle Messungen gleichzeitig beginnen.

Da wir für die Variation der Induktivität keine quantitativen Messwerte haben, beschränkt sich unsere Auswertung auf halbquantitative Aussagen über den Verlauf der Graphen und die Zeitkonstante  $\tau$ .

	Ohne Alles	Eisenkern ohne Joch	Eisenkern mit Joch
$U_{i,max}$ in V	-4,15	-4,15	-4,15
$\tau$ (am Graphen abgelesen)	$\tau_1$	$\tau_2 > \tau_1$	$\tau_3 > \tau_2$

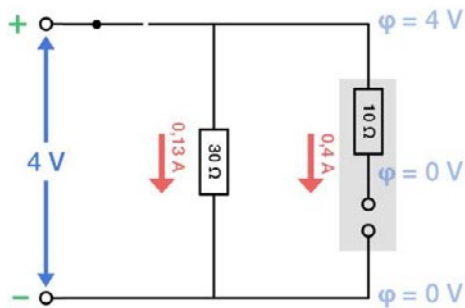
Anhand der Messung lässt sich die halbquantitative Aussage „je größer die Induktivität  $L$ , desto größer ist die Zeitkonstante  $\tau$ “ sowie die Aussage „die Induktivität hat keine Auswirkung auf die maximale Induktionsspannung“ begründen.

## Vorüberlegung zum Vorzeichen der Spannungen beim Ausschalten

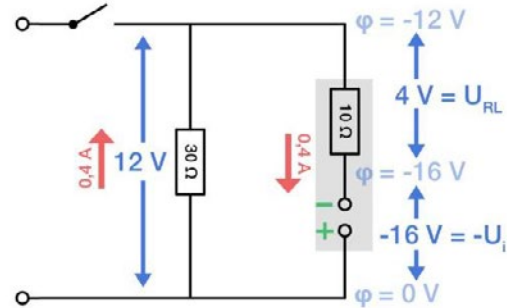
Auch beim Ausschaltvorgang nutzen wir unsere Modellvorstellung, in der die reale Spule als Reihenschaltung aus Innenwiderstand und elektrischer Quelle gesehen werden kann. Es gilt wieder der Zusammenhang  $U_L = U_{RL} - U_i$  für die real messbare Spannung  $U_L$ , der Spannung am Innenwiderstand  $U_{RL}$  und der Induktionsspannung  $U_i$ .

Wieder verhält sich die Spule so, dass der Verlauf der Stromstärke stetig erfolgt. Fließen vor dem Ausschalten also z. B. 0,4 A durch die Spule, sorgt die Induktionsspannung im Moment des Ausschaltens dafür, dass dieser Stromfluss aufrechterhalten bleibt. Nur „sieht“ die Spule nun nicht nur ihren Innenwiderstand, sondern auch den jetzt in Reihe geschalteten Entladewiderstand und muss dementsprechend eine höhere Spannung zum Aufrechterhalten der 0,4 A bereitstellen.

Ausschaltvorgang  $t = 0$



Ausschaltvorgang  $t = 0 + dt$



**Abb. 8:** Vorzeichenüberlegungen beim Ausschaltvorgang. Rechts wurde der Schalter gerade eben geöffnet.

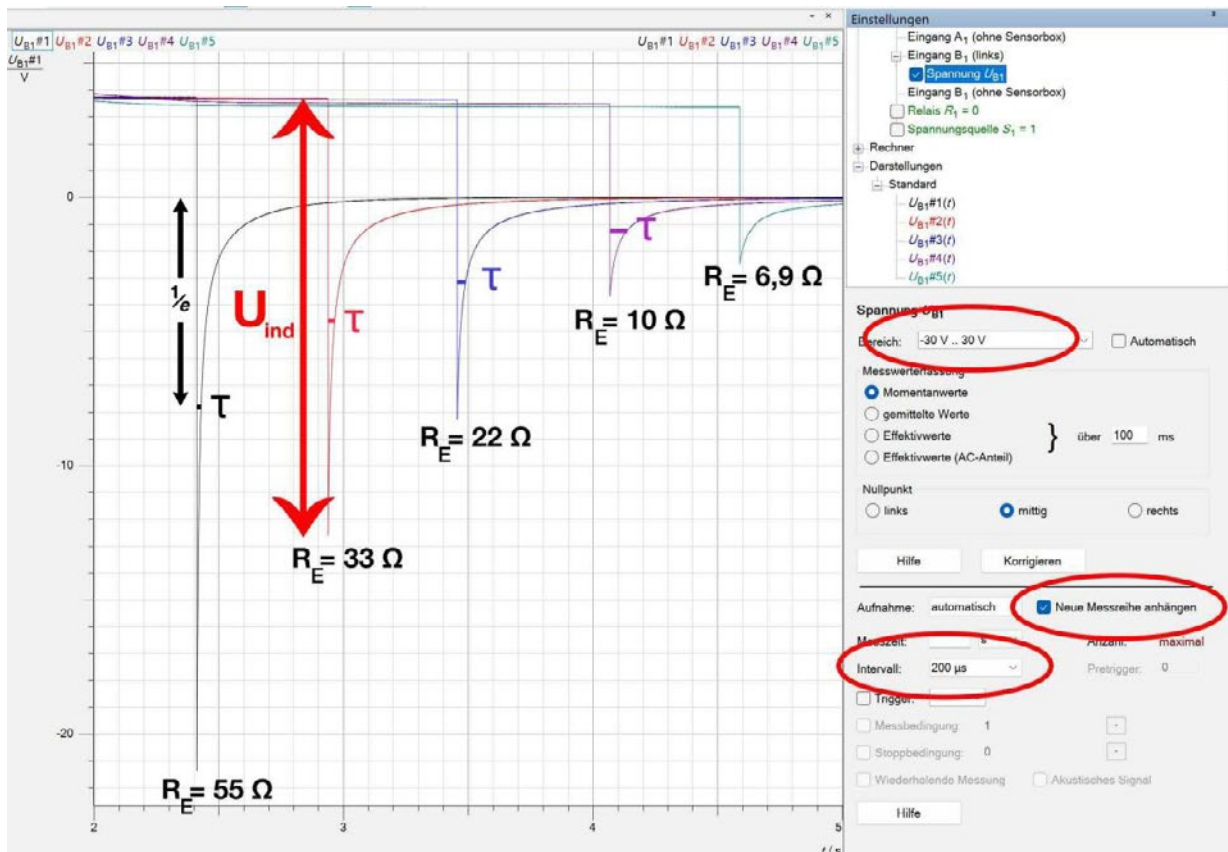
Im linken Bild ist der Schalter noch geschlossen, durch die Spule (grauer Kasten) fließt ein Strom von 0,4 A. Eingezeichnet sind die Potentiale vor und nach dem Innenwiderstand sowie nach der Spule. Das rechte Bild zeigt den Moment kurz nach dem Öffnen des Schalters. Die Spule möchte den Stromfluss von 0,4 A aufrechterhalten, hat aufgrund des Kreisschlusses nun aber die Summe der Widerstände  $10\ \Omega + 30\ \Omega = 40\ \Omega$  als Gesamtwiderstand. Die Induktionsspannung muss also +16 V betragen. Real gemessen können in diesem Moment allerdings nur  $U_L = 4\ \text{V} - (+16\ \text{V}) = -12\ \text{V}$ . Hilfreich zum Verständnis der Vorzeichen der elektrischen Quelle in der Spule kann folgende Regel sein: Außerhalb einer elektrischen Quelle fließt der Strom von Plus nach Minus, innerhalb muss er aber von Minus nach Plus fließen, um einen Kreisfluss von Ladungen zu ermöglichen.

## Ausschaltvorgang mit verschiedenen Widerständen

Beim Ausschaltvorgang wird die Parallelschaltung aus Widerstand und Spule verwendet, damit sich diese über den Widerstand im Aus-Zustand des Kippschalters entladen kann.

Zu beachten ist, dass die Induktionsspannung vom Spannungswert  $U_{\text{Bat}}$  aus gemessen werden muss (siehe: Vorüberlegung zum Vorzeichen der Spannungen beim Ausschalten). Gut zu erkennen ist, dass größere Entladewiderstände zu höheren Induktionsspannungen führen. Ebenfalls zu erkennen ist der Einfluss des Widerstands auf die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$ , denn bei größeren Widerständen fällt die Kurve, analog zum Einschaltvorgang, schneller ab.

Um  $\tau$  am Graphen abzulesen, zieht man gedanklich den Offset ab und misst die Zeitdauer, bis die Spannung auf den Wert  $\frac{1}{e} \cdot U_0$  abgefallen ist. Dies ist in der folgenden Abbildung eingezeichnet.



**Abb. 9:** Ausschaltvorgang: Verschiedene Entladewiderstände  $R_E$  führen zu unterschiedlichen maximalen Induktionsspannungen, wie es auch die Formel  $U_{i,max} = \left(1 + \frac{R_E}{R_L}\right) \cdot U_{Bat}$  vorhersagt.

Analog zu den vorherigen Auswertungen messen wir:

Messung	$R_E = 55 \Omega$	$R_E = 33 \Omega$	$R_E = 22 \Omega$	$R_E = 10 \Omega$
$R$ in $\Omega$	64,5	42,5	31,5	19,5
$U_{i,max}$ in V	24,9	16,2	11,9	7,2
$\tau$ in s (am Graphen abgelesen)	0,014	0,026	0,035	0,066

Vergleicht man mit den Werten der Theorie  $U_i = \left(1 + \frac{R_E}{R_L}\right) \cdot U_{Bat}$  erhält man mit  $R_L = 9,5 \Omega$ :

Theorie	$R_E = 55 \Omega$	$R_E = 33 \Omega$	$R_E = 22 \Omega$	$R_E = 10 \Omega$
$U_{i,max}$ in V	27,8	18,3	13,6	8,4

Anhand der Graphen lässt sich analog zum Einschaltvorgang die halbquantitative Aussage „je größer  $R$ , desto kleiner ist die Zeitkonstante  $\tau$ “ begründen.

Trotz der hohen Abtastrate kann nicht mit Sicherheit garantiert werden, dass der Maximalwert der Induktionsspannung zu Beginn registriert wird. Deshalb ist es nicht verwunderlich, dass die gemessenen Werte unter den theoretischen Werten der Induktionsspannung liegen.

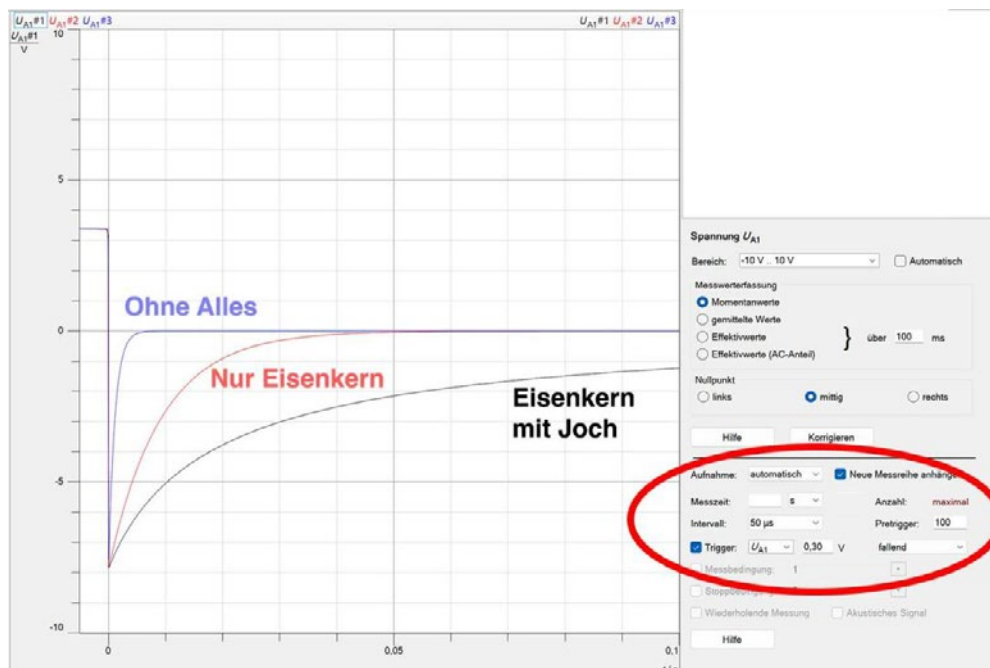
## Ausschaltvorgang mit verschiedenen Induktivitäten

Analog zum Einschaltvorgang können wir die Induktivität der Spule durch stückweises Entfernen des Eisenkerns variieren. Wir verwenden bei allen Messungen denselben Entladewiderstand  $R_E = 22 \, \Omega$ . Mit  $I(t) = \frac{U_{Bat}}{R_L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$  und  $\tau = \frac{L}{R} = \frac{L}{R_E + R_L}$  folgt

$$\frac{dI}{dt} = -\left(1 + \frac{R_E}{R_L}\right) \cdot \frac{U_{Bat}}{L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Somit kürzt sich wie beim Einschaltvorgang die Induktivität in der Berechnung der Induktionsspannung heraus:

$$U_i(t) = \left(1 + \frac{R_E}{R_L}\right) \cdot U_{Bat} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



**Abb. 10:** Ausschaltvorgang: Bei der Variation der Induktivität wurde ein Triggersignal verwendet, damit alle Messungen gleichzeitig beginnen.

Gut zu beobachten ist der Einfluss der Induktivität auf die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$ . Je kleiner  $L$ , desto schneller sinkt die Induktionsspannung. Auf die maximale Induktionsspannung zum Zeitpunkt des Öffnens des Schalters hat die Induktivität allerdings keinen Einfluss. Dabei ist auf ein ausreichend kleines Zeitintervall bei der Messung (hier  $50 \, \mu\text{s}$ ) zu achten, sonst starten die Kurven eventuell bei unterschiedlichen maximalen Induktionsspannungen.

Analog zu obiger Auswertung messen wir für  $R_E = 22 \, \Omega$ :

	Ohne Alles	Eisenkern ohne Joch	Eisenkern mit Joch
$U_{i,max}$ in V	11,9	11,9	11,9

So lässt sich die Aussage „die Induktivität hat keine Auswirkung auf die maximale Induktionsspannung“ begründen. Zusätzlich sieht man wieder am Verlauf des Graphen: „Je größer  $L$ , desto größer ist die Zeitkonstante“.

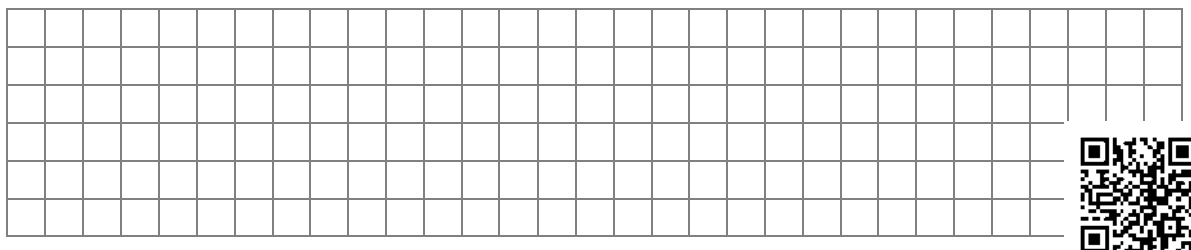
## Vorschlag eines möglichen Arbeitsblatts

### Ziel:

Wir wollen den Einfluss des Ohm'schen Widerstands und der Induktivität auf die induzierte Spannung untersuchen. Im Rahmen der Auswertung analysieren wir die Maximalwerte der Induktionsspannung und stellen einen Bezug zur Änderung des magnetischen Flusses her.

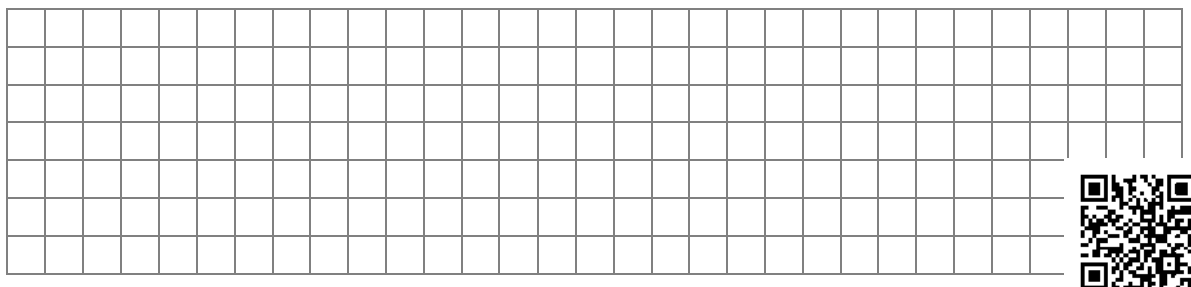
### Aufbauten:

Beim Einschaltvorgang soll die Spule über einen Vorwiderstand geladen werden. Beim Ausschalten muss der Widerstand so eingebaut werden, dass sich die Spule über diesen entladen kann. Nutze in beiden Fällen jeweils einen Ein-Aus-Schalter. Beide Male soll der zeitliche Verlauf der Spannung an der Spule aufgenommen werden. Zeichne für das Ein- und Ausschalten mögliche Schaltpläne und baue den Einschaltvorgang auf. Wenn Du Hilfe benötigst, scanne den QR-Code.



### Einschaltvorgang: Variation des Vorwiderstands

Starte den Einschaltvorgang und messe den Verlauf der Spannung. Dieser soll aus Gründen der Einheitlichkeit positiv sein. Beschreibe Auffälligkeiten im Verlauf und überlege dir, wie du aus dem Graphen den Maximalwert der Induktionsspannung (mit Vorzeichen!) ablesen kannst. Wenn Du beim Einschaltvorgang Hilfe benötigst, scanne den QR-Code.



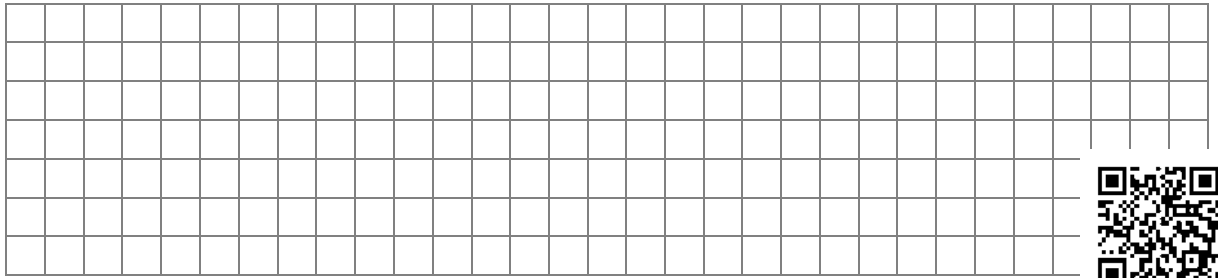
Wiederhole die Messung für verschiedene Vorwiderstände  $R_E$  und nimm die Graphen so auf, dass du sie vergleichen kannst. Der Widerstand  $R_{ges}$  setzt sich aus dem Vorwiderstand und dem Innenwiderstand der Spule zusammen. Die letzte Zeile bleibt noch leer.

	$R_E =$	$R_E =$	$R_E =$	$R_E =$
$R_{ges}$ in $\Omega$				
$U_{i,max}$ in V				
$\tau$ in s				



## Ausschaltvorgang: Variation des Vorwiderstands und der Induktivität

Starte den Ausschaltvorgang und messe den Verlauf der Spannung. Dieser soll aus Gründen der Einheitlichkeit zu Beginn positiv sein. Beschreibe Auffälligkeiten im Verlauf und überlege dir, wie du aus dem Graphen den Maximalwert der Induktionsspannung (mit Vorzeichen!) ablesen kannst.



Wiederhole die Messung für verschiedene Entladewiderstände  $R_E$  und miss die Graphen so, dass du sie vergleichen kannst.

	$R_E =$	$R_E =$	$R_E =$	$R_E =$
$R_{ges}$ in $\Omega$				
$U_{i,max}$ in V				

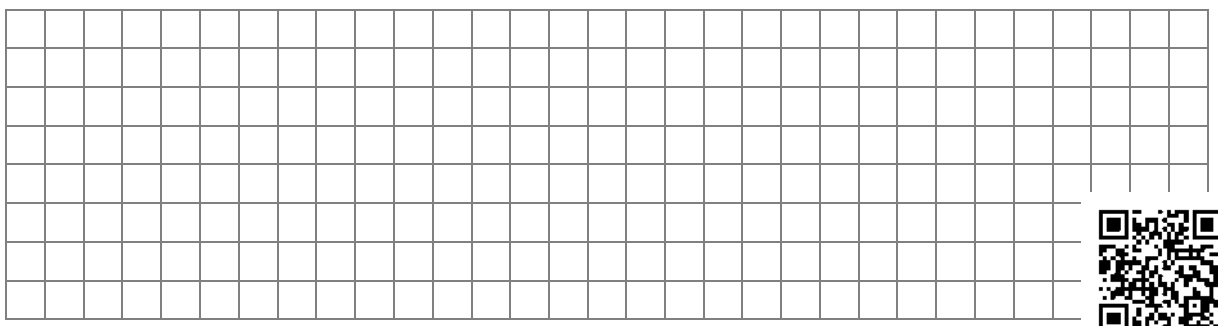
Wiederhole die Messung mit dem gleichen Widerstand aber unterschiedlichen Induktivitäten.

$U_{i,max}$ in V			

## Auswertung:

Zusätzlich zum Maximalwert der Induktionsspannung interessiert uns der Verlauf der Kurven. Dieser wird z. B. durch die Halbwertszeit charakterisiert. Betrachte deine Kurven vom Ein- und Ausschalten erneut und bilde möglichst viele richtige Sätze aus dem Wortgeländer:

Widerstand	Induktivität	Maximalwert der Induktionsspannung	Lange Halbwertszeit	Schnelles Abklingen
Einschalten	Kein Einfluss	Je größer	Je kleiner	Ausschalten



## Die gestuften Lernhilfen hinter den QR-Codes zum Arbeitsblatt

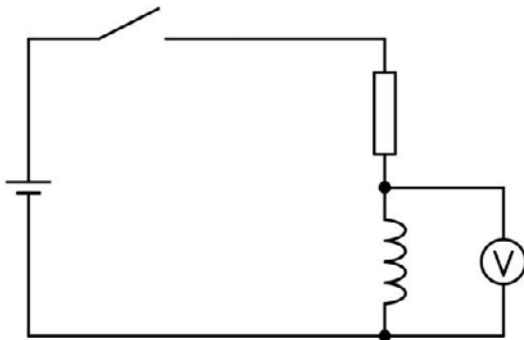
### Aufbauen

Du benötigst für den Aufbau die Bauteile:

- eine Spule mit 1000 Windungen,
- eine Batterie,
- ein U-förmiger Eisenkern mit Joch,
- ein Ein-Aus-Kippschalter,
- verschiedene Widerstände und
- ein digitales Messwerterfassungssystem

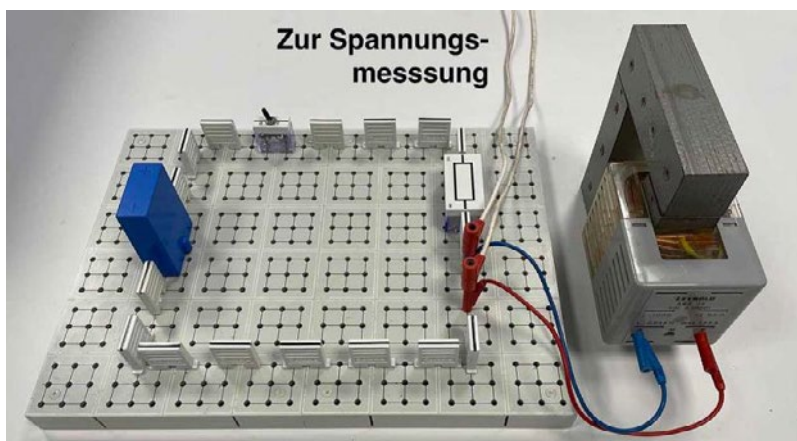
Der Vorwiderstand und die Spule müssen in Reihe geschaltet werden. Die Spannung wird an der Spule gemessen, dafür braucht man ein Kabel vor und eins nach der Spule. Der Ein-Aus-Schalter kann dabei direkt nach der Batterie eingebaut werden.

Ein möglicher Schaltplan sieht so aus:



Übernimm diesen auf dein Arbeitsblatt.

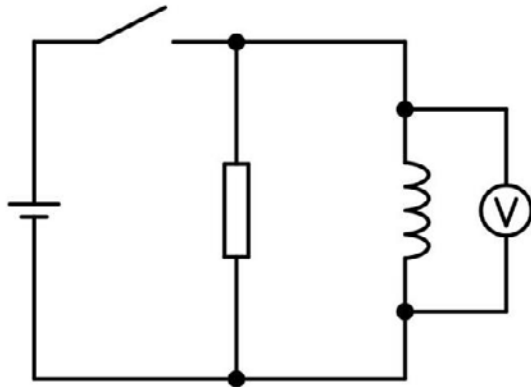
Aufgebaut könnte dein Versuch so aussehen:



Ausschaltvorgang:

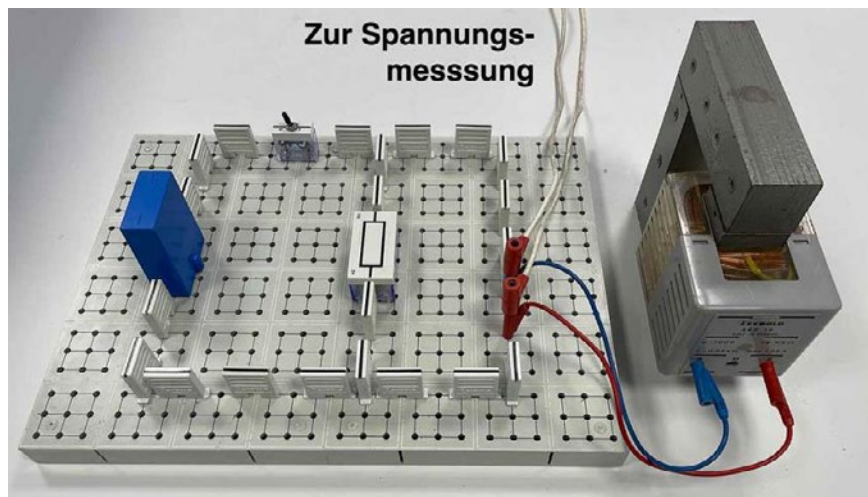
Die Spule muss zuerst über den Ein-Aus-Schalter aufgeladen werden. Wenn man dann den Kippschalter in die Aus-Position bewegt, muss sich die in der Spule gespeicherte Ladung über den Widerstand entladen können. Du brauchst also eine Parallelschaltung aus Spule und Widerstand. Überlege dir genau, wo du den Ein-Aus-Schalter einbauen musst.

Ein möglicher Schaltplan sieht so aus:



Übernimm diesen auf dein Arbeitsblatt.

Aufgebaut könnte dein Versuch so aussehen:



## Einschaltvorgang: Variation des Vorwiderstands

Direkt nach dem Einschalten steigt die Kurve sprunghaft auf einen Maximalwert an, sinkt danach aber nicht auf null zurück. Dies liegt daran, dass die Spule selbst keine ideale Spule ist, sondern einen Innenwiderstand besitzt. Ein Teil der Batteriespannung fällt also nach dem Einschalten an ihr ab. Der andere Teil fällt am Vorwiderstand ab.

Übrigens: je größer der Vorwiderstand, desto weniger Spannung fällt nach dem Abklingen an der Spule ab.

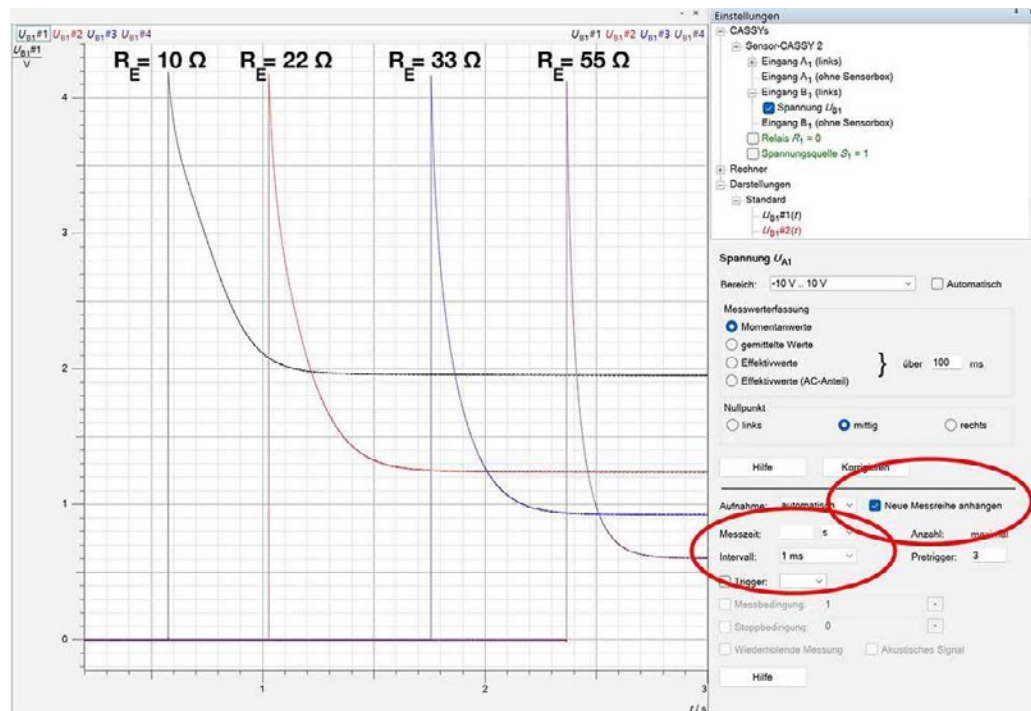
Der Maximalwert der Induktionsspannung ist der Peak den man zu Beginn sieht. Allerdings trägt die Induktionsspannung ein negatives Vorzeichen, da sie dem (positiven) Einschalten entgegengerichtet ist.

Dies kann man am Induktionsgesetz sehen:

$$U_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Da sich der magnetische Fluss beim Einschalten aufbaut, ist seine Änderung positiv. Die Induktionsspannung muss aufgrund des Vorzeichens im Induktionsgesetz aber negativ sein.

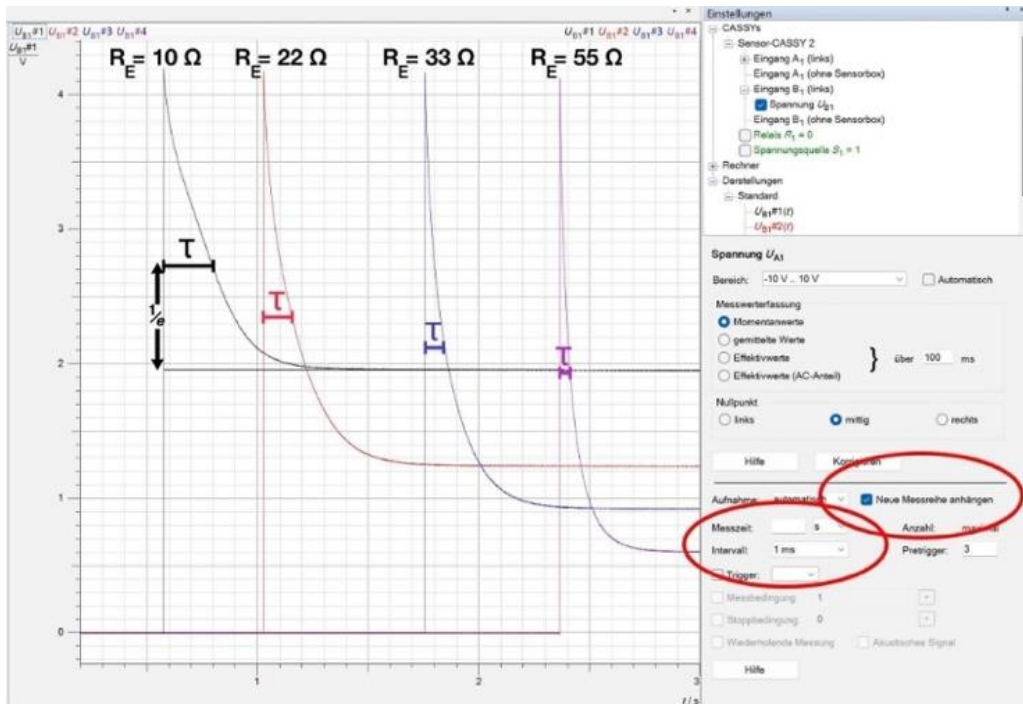
Du solltest bei der Aufnahme der Graphen ungefähr folgende Verläufe aufgenommen haben:



## Einschaltvorgang: zeitlicher Verlauf

Um  $\tau$  am Graphen abzulesen, zieht man gedanklich den Offset ab und misst die Zeitdauer, bis die Spannung auf den Wert  $\frac{1}{e}$  abgefallen ist.

In folgender Abbildung sind die Werte für  $\tau$  für verschiedene Widerstände eingezeichnet. Miss nun deine Werte für  $\tau$  und trage sie in der Tabelle ein.



Mögliche Messwerte für den Zusammenhang zwischen Widerstand und Zeitkonstante sind hier dargestellt.

19,5 Ω	31,5 Ω	42,5 Ω	64,5 Ω
0,29 s	0,17 s	0,13 s	0,09 s

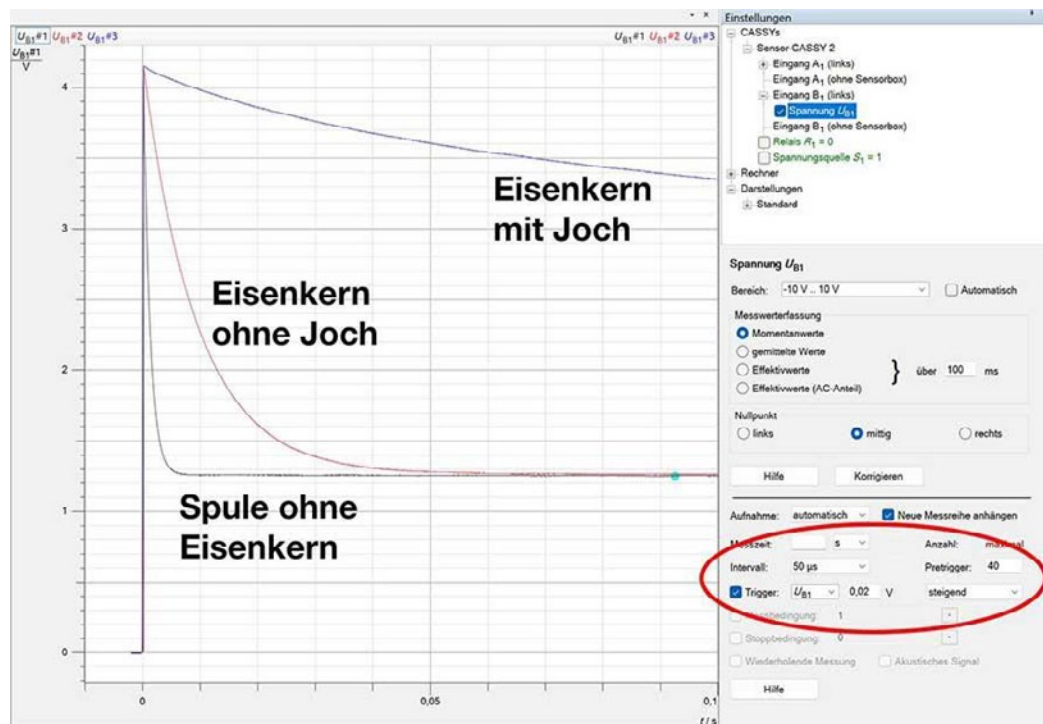
Überlege dir, ob ein direkter oder indirekter Zusammenhang besteht und formuliere diesen z. B. mit folgendem Satzanfang: "Wächst die eine Größe um den Faktor ..."

## Einschaltvorgang: Variation der Induktivität

Die Induktivität einer Spule lässt sich durch stückweises Entfernen des Jochs bzw. Eisenkerns verkleinern. Wiederhole die Messung mit dem gleichen Vorwiderstand und

- miss mit Eisenkern und Joch,
- nur mit Eisenkern,
- komplett ohne Eisenkern und ohne Joch

Du solltest bei der Aufnahme der Graphen ungefähr folgende Verläufe aufgenommen haben:



## Einschaltvorgang: Zusammenhang zum Magnetischen Fluss

Mit dem Induktionsgesetz folgt:

*Je größer die Induktionsspannung, desto größer ist die Änderung des Magnetischen Flusses.*

Überlege dir, wann die Induktionsspannung am größten ist und welche Formel du für den Magnetischen Fluss kennst.

Der Magnetische Fluss ist definiert als

$$\phi = B \cdot A$$

wobei  $B$  das Magnetfeld (genauer: die magnetische Flussdichte) und  $A$  die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche ist. Die Fläche ändert sich bei diesem Experiment nicht, aber das Magnetfeld baut sich auf. Überlege dir, welche Formel du für die Stärke eines Magnetfelds in einer Spule kennst.

Wir kennen bereits die Formel für die magnetische Flussdichte einer langgestreckten Spule:

$$B = \mu \cdot \frac{I \cdot N}{l}$$

Dabei ändert sich in unserem Experiment nur die Stromstärke  $I$ . Formuliere nun einen weiteren Satz aus dem Wortgeländer.

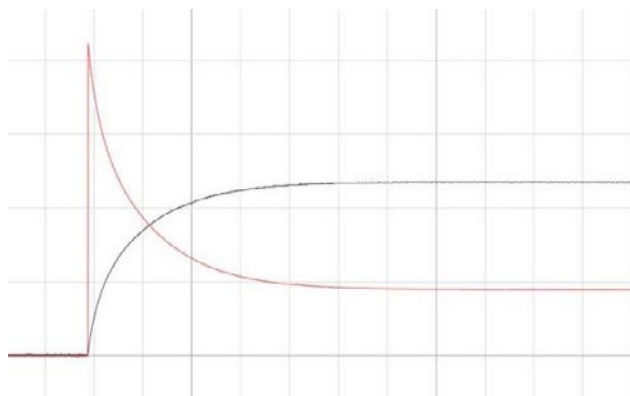
Da beim Magnetischen Fluss die Fläche konstant bleibt, lässt sich folgender Satz formulieren:

*Der Magnetische Fluss ändert sich am stärksten, wenn sich das Magnetfeld  $B$  am stärksten ändert. Mit der Formel für das Magnetfeld einer langgestreckten Spule ändert sich dieses am stärksten, wenn sich die Stromstärke am stärksten ändert.*

Miss nun also den Verlauf der Stromstärke gleichzeitig zum Verlauf der Induktionsspannung um deine Aussage zu verifizieren.

Ein möglicher Verlauf der Stromstärke und Spannung ist hier abgebildet. Ordne die Graphen der Spannung und der Stromstärke zu.

Überlege dir, wieso die Graphen deine Aussage stützen.



## Ausschaltvorgang: Variation des Vorwiderstands und der Induktivität

Die Kurve beginnt zuerst positiv ungefähr bei der Batteriespannung und fällt dann sprunghaft ins negative. Danach verläuft sie exponentiell abfallend gegen null.

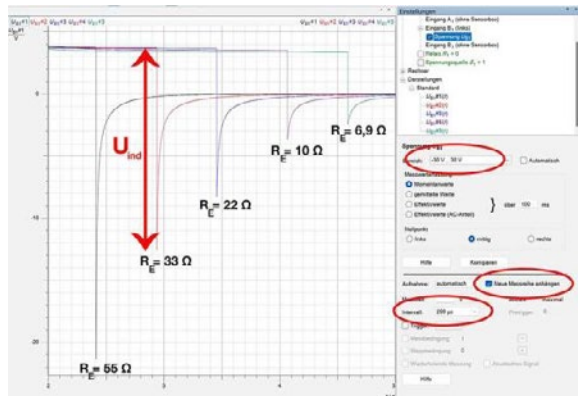
Der Maximalwert der Induktionsspannung ist der Unterschied aus dem (positiven) Spannungswert vor dem Ausschalten und dem negativen Peak kurz nach dem Ausschalten. Allerdings trägt die Induktionsspannung hier ein positives Vorzeichen, da sie dem (negativen) Ausschalten entgegengerichtet ist.

Dies kann man am Induktionsgesetz sehen:

$$U_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Da sich der magnetische Fluss beim Ausschalten abbaut, ist seine Änderung negativ. Die Induktionsspannung muss aufgrund des Vorzeichens im Induktionsgesetz aber positiv sein.

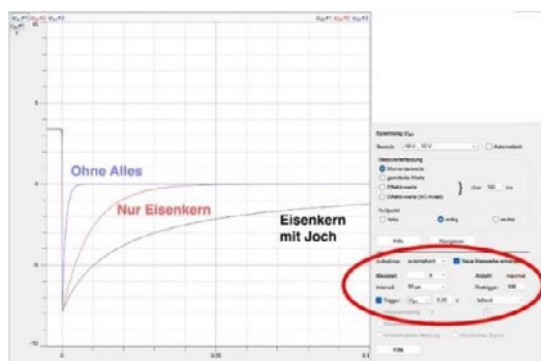
Du solltest bei der Aufnahme der Graphen ungefähr folgende Verläufe erhalten haben:



Die Induktivität einer Spule lässt sich durch stückweises Entfernen des Jochs bzw. Eisenkerns verkleinern. Wiederhole die Messung mit dem gleichen Vorwiderstand und

- miss mit Eisenkern und Joch,
- nur mit Eisenkern,
- komplett ohne Eisenkern und ohne Joch

Du solltest bei der Aufnahme der Graphen ungefähr folgende Verläufe erhalten haben:



## Auswertung

Die Halbwertszeit gibt an, wie lange es dauert, bis die Kurven auf die Hälfte ihres ursprünglichen Werts abgesunken sind. Fällt die Kurve also schnell ab, spricht das für eine kurze Halbwertszeit.

In all deinen Messungen hatten sowohl Widerstand als auch Induktivität einen Einfluss auf die HWZ. Formuliere diesen!

- Je größer der Widerstand beim Einschalten, desto schneller klingt die Exponentialfunktion ab
- Je größer die Induktivität beim Ausschalten, desto langsamer klingt die Exponentialfunktion ab
- Die Induktivität hat weder beim Ein- noch beim Ausschalten einen Einfluss auf den Maximalwert der Induktionsspannung
- Je größer der Widerstand beim Ausschalten, desto größer ist der Maximalwert der Induktionsspannung



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

***Digitale Lernhilfen zum eigenen Import in QR-Lernhilfen***

***Lernhilfen als PDF zum Download***

## 2.5 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment **Mechanische Schwingung**

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<p>Einfache Variante</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Schraubenfedern mit verschiedenen Federhärten, z. B. 5 N/m und 10 N/m</li> <li>• Massestücke z. B. 50 g und 100 g</li> <li>• Stoppuhr, Messschieber</li> </ul> <p>Technische Variante</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• zwei Federn mit identischer Federhärte z. B. 5 N/m</li> <li>• regelbarer Motor mit 5 bis 25 Umdrehungen pro min und Exzenter</li> <li>• Massestücke z. B. 50 g und 100 g</li> <li>• Wagen und ggf. Schiene, Stativmaterial</li> <li>• Videoaufnahmegerät</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 4 Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen hypothesengeleitet die Abhängigkeit der Eigenfrequenz eines schwingungsfähigen mechanischen Systems von Systemparametern und vergleichen sie mit der theoretischen Vorhersage. Bei einer erzwungenen Schwingung ermitteln sie die Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und stellen qualitative Beobachtungen zur Phasenverschiebung zwischen Erreger und Oszillator an.

### Beschreibung des Experiments

#### Einfache Variante

Zunächst bekommt jede Schülerin bzw. jeder Schüler den Auftrag, Hypothesen zur Abhängigkeit der Eigenfrequenz des Systems aus Feder und Massestück aufzustellen: Federhärte und Masse. Dabei kann auf das Schülerexperiment *Untersuchung der Schwingungsdauer eines Fadenpendels* aus Lernbereich 11.2 verwiesen werden.

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Federhärte und regen das Federpendel mit der Hand zu Schwingungen an.

Mittels einer Stoppuhr werden gemäß der aufgestellten Hypothesen für verschiedene Federhärten und Massenstücke die Eigenfrequenzen ermittelt und mit der theoretischen Vorhersage verglichen.

Die Schülerinnen und Schüler variieren die Erregerfrequenz, z. B. mit Hilfe eines Metronoms, ermitteln die Amplitude mit einem senkrecht aufgestellten Messschieber und beobachten die Phasenverschiebung zwischen der Handbewegung und der Bewegung des Massestücks an der Feder. Die Schwingungsdauer kann beispielsweise durch Videoanalyse oder aus der durch einen an der Feder befestigten Magneten hervorgerufenen Induktionsspannung an einer

Spule bestimmt werden. Die Anregung durch die Hand muss über den ganzen Frequenzbereich möglichst sinusförmig erfolgen und dieselbe Erregeramplitude aufweisen.

Bemerkung: Auch bei Durchführung der technischen Variante wird empfohlen, dass die Schülerinnen und Schüler die Eigenfrequenz einer Feder zunächst selbst im Freihandversuch erspüren.

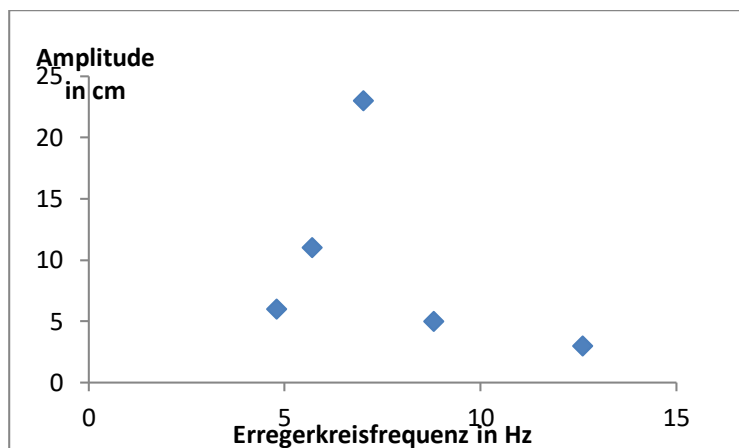
Beispielhafte Messungen der Eigenfrequenz:

Federhärte D	5,0 N/m	5,0 N/m	10 N/m
Masse m	50 g	100 g	100 g
10 Periodendauern (10 T)	6,23 s	8,84 s	6,21 s
Kreisfrequenz $\omega$	10 Hz	7,1 Hz	10 Hz
$\sqrt{\frac{D}{m}}$	10 Hz	7,1 Hz	10 Hz

Einheiten:  $\sqrt{\frac{N}{m \cdot kg}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m \cdot kg}} = Hz$

Beispielhafte Messungen der erzwungenen Schwingung bei D = 5,0 N/m und m = 100 g:

$f_{Hand}$	46/min	54/min	67/min	84/min	120/min
$\omega_{Hand}$	4,8 Hz	5,7 Hz	7,0 Hz	8,8 Hz	12,6 Hz
$A_{Masse}$	6 cm	11 cm	23 cm	5 cm	3 cm



**Abb. 1:** Zusammenhang zwischen Erregerkreisfrequenz und Amplitude bei den beispielhaften Messungen der erzwungenen Schwingung bei der einfachen Variante

Schon mit diesem einfachen Freihandexperiment kann der prinzipielle Verlauf einer Resonanzkurve quantitativ grob abgebildet werden.

## Technische Variante

Am Wagen mit dem Massenstück (ggf. auf einer Schiene) wird vorne und hinten je eine Feder befestigt. Eine dieser Federn wird am Exzenter des Motors angebracht, die andere wird mit dem festen Stativmaterial verbunden (siehe Abb. 2).

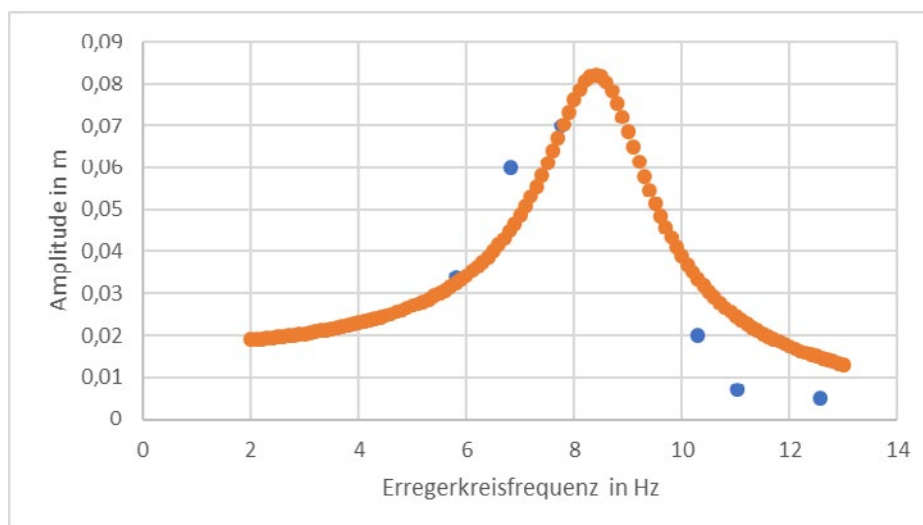


**Abb. 2:** Versuchsaufbau

Für verschiedene Umdrehungszahlen pro Minute wird mittels Videoanalyse die Amplitude bestimmt bzw. die Phasenverschiebung zwischen der Erregerfrequenz und der Bewegung des Wagens beobachtet. Als Maßstab kann z. B. die Länge einer Schiene verwendet werden (alternativ kann auch ein Lineal mit aufgenommen werden). Im Beispiel nehmen 10 Schwellen eine Länge von 75 mm ein, eine Schwelle ist 3 mm breit, der Abstand zwischen zwei Schwellen beträgt 5 mm.

Messungen für  $D = 5 \text{ N/m}$  und  $70 \text{ g}$ :

$T_{\text{Motor}}$	1,08 s	0,92 s	0,81 s	0,61 s	0,57	0,50
$\omega_{\text{Motor}}$	5,8 Hz	6,8 Hz	7,8 Hz	10,3 Hz	11,0 Hz	12,6 Hz
$A_{\text{Wagen}}$	3,4 cm	6,0 cm	7,0 cm	2,0 cm	0,7 cm	0,5 cm

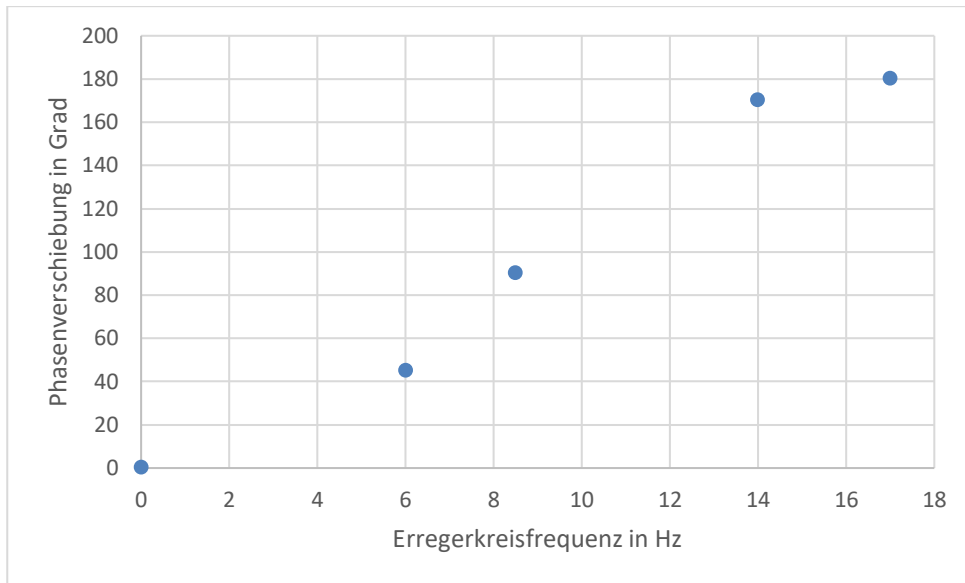


**Abb. 3:** Zusammenhang zwischen Erregerkreisfrequenz und Amplitude bei der technischen Variante

$$\text{Amplitude} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + c \cdot \omega_E^2}}$$

Wenn die Erregerfrequenz viel kleiner als die Eigenfrequenz ist, beobachtet man fast keinen Phasenunterschied. Wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz ist, eilt der Erreger dem Schwinger um  $\frac{\pi}{2}$  voraus. Wenn die Erregerfrequenz viel größer als die Eigenfrequenz ist, beträgt der Phasenunterschied nahezu  $\pi$ .

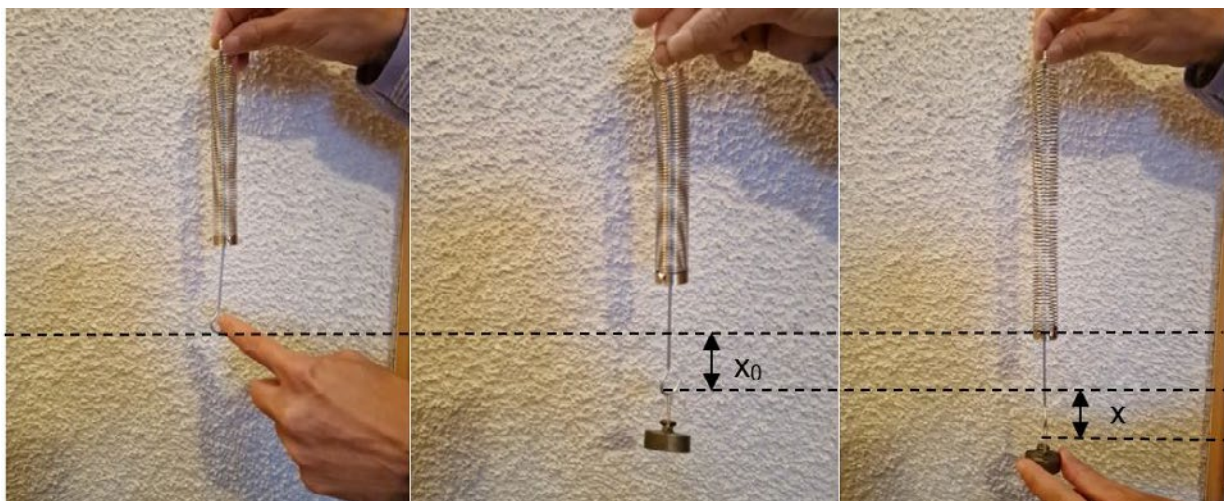
In Ergänzung kann optional noch der folgende Verlauf der Phasenverschiebung gemessen werden, der die qualitativen Beobachtungen untermauert.



**Abb. 4:** Zusammenhang zwischen der Erregerkreisfrequenz und der Phasenverschiebung

Anmerkungen:

1. Im Handel sind oft nur vorgespannte Federn erhältlich. Für sie gilt dieselbe Gleichung wie für die nicht vorgespannten Federn mit Federhärte  $D$ . Bei vorgespannten Federn ist eine bestimmte Kraft nötig, um sie in die entspannte Ruhelage zu bringen. Ab der Ruhelage gilt das Hookesche Gesetz. Anhand einer vertikal hängenden Feder mit angehängter Masse  $m$  soll erläutert werden, dass die Differentialgleichung und damit der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz, Federhärte und Masse bei einer vorgespannten Feder derselbe ist wie bei einer nicht vorgespannten Feder.



$$\begin{aligned} F &= m a \\ -D(x_0 + x) + m g &= m \ddot{x} && \text{mit Kräftegleichgewicht in der Ruhelage } Dx_0 = mg \text{ folgt} \\ -D x &= m \ddot{x} \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung führt auf  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ .

(Mit einem Energieerhaltungsansatz  $-m g (x_0 + x) + 0,5 \cdot D (x_0 + x)^2 + 0,5 \cdot m \dot{x}^2 = \text{const.}$  ist die Herleitung ebenfalls möglich.)

2. Da bei dem Versuch mit dem Wagen eine der beiden horizontal gespannten Federn gedehnt und die andere gleichzeitig gestaucht wird, ist die Federhärte insgesamt das Doppelte der Federhärte einer Feder.



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

## 2.6 Hintergrundinformation zu den Schülerexperimenten

### Elektromagnetische Schwingung

#### 2.6.1 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment

#### Nachweis der Thomson-Gleichung

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 gA und eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• stabilisiertes Netzgerät</li> <li>• Experimentierkabel</li> <li>• ggf. Rastersteckplatte</li> <li>• digitales Messwerterfassungssystem, das für Schülerexperimente geeignet ist (z.B. Smart Spannungssensor von Pasco)</li> <li>• alternativ: Oszilloskop für Schülerexperimente</li> <li>• ca. 100 <math>\Omega</math> Widerstand</li> <li>• 4 bipolare Elektrolytkondensatoren (ca. 220 <math>\mu\text{F}</math>)</li> <li>• Spule mit Eisenkern (ca. 1000 Windungen)</li> <li>• Wechselschalter (kann auch durch Umstecken eines Kabels realisiert werden.)</li> <li>• Adapter mit 4-mm Bananenstecker zum Anschluss von bedrahteten Bauelementen (kann auch durch Krokodilklemmen und Experimentierkabel ersetzt werden.)</li> </ul>
Digitales Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Digitales Endgerät zur Auswertung der Messreihen (z.B. Tablet)</li> <li>• evtl. Tabellenkalkulationsprogramm</li> <li>• Vorlage: „Schwingkreis-Vorlage.spklab“ (für die App SPARKvue)</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 LB 2 gA Elektromagnetische Induktion und Schwingungen

Die Schülerinnen und Schüler stellen Hypothesen über Auswirkungen von Veränderungen der Versuchsparameter beim elektromagnetischen Schwingkreis auf. Sie planen experimentelle Vorgehensweisen zur Überprüfung dieser Hypothesen und führen diese Experimente mithilfe eines computergestützten Messwerterfassungssystems angeleitet durch.

## Ph 12 LB 4 eA Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen hypothesengeleitet die Abhängigkeit der Eigenfrequenz eines elektromagnetischen Schwingkreises von Systemparametern mithilfe einer computergestützten Messwerterfassung und bestätigen die Thomson-Gleichung.

Sie untersuchen die Dämpfung der Schwingung in Abhängigkeit vom Ohm'schen Widerstand<sup>1</sup>.

### Ziel

Im Rahmen der mechanischen Schwingungen haben die Schülerinnen und Schüler beim Federpendel bereits den periodischen Energieaustausch zwischen dem Pendelkörper und der Feder kennengelernt. Durch Analogiebetrachtung identifizieren sie zunächst die Spule und den Kondensator im Schwingkreis als Energiespeicher und erkennen die Induktivität und Kapazität als die zu untersuchenden Systemparameter. Die Schülerinnen und Schüler stellen Hypothesen zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer eines elektromagnetischen Schwingkreises auf. Sie entwickeln Methoden zum experimentellen Nachweis ihrer Hypothesen. Zur Bestimmung der Schwingungsdauern nutzen sie ein digitales Messwerterfassungssystem sowie auch Regressionsverfahren im Rahmen der Darstellungen und Auswertung der Messergebnisse.

### Aufbau

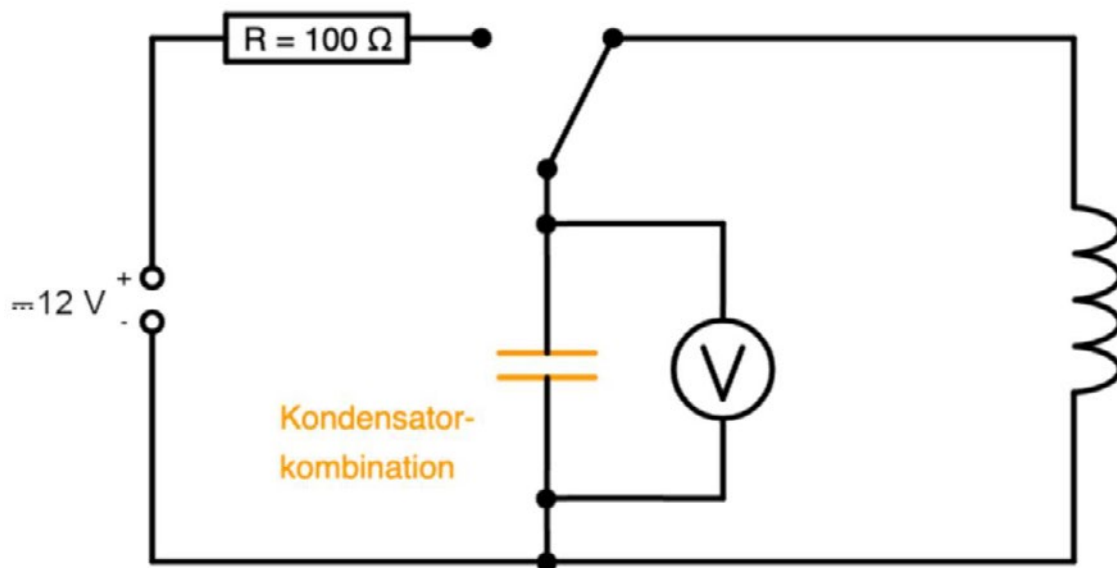
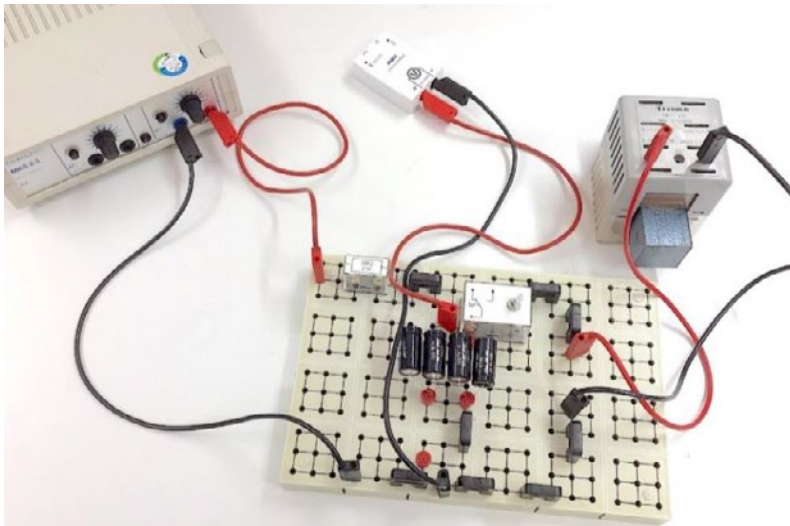


Abb. 1: Schaltskizze

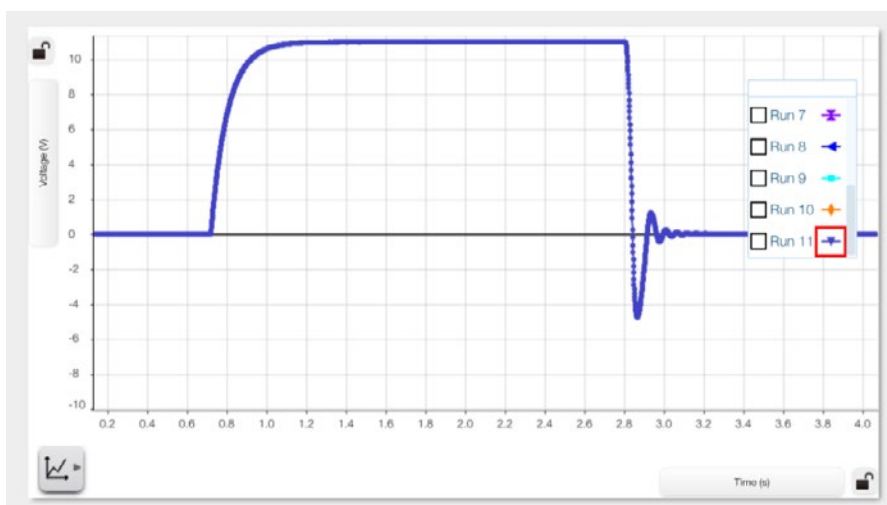
<sup>1</sup>Im Lehrplan folgen hier die Kompetenzerwartungen zur erzwungenen elektromagnetischen Schwingung. Die Hintergrundinformationen hierfür befinden sich in einem weiteren Dokument.



**Abb. 2:** Foto des Aufbaus mit einer Kombination aus vier parallel geschalteten Kondensatoren und einem zusätzlichen Dämpfungswiderstand von  $10\ \Omega$  (Versuchsvariante)

Um die Kapazität zu verändern, werden bipolare  $220\ \mu\text{F}$ -Kondensatoren unterschiedlich in Form einer Reihen- oder Parallelschaltung kombiniert. Zur Aufzeichnung des zeitlichen Verlaufs der Spannung kommt ein digitales Messwerterfassungssystem zum Einsatz. Außerdem verwendet man in dem Versuch eine in vielen Sammlungen vorhandene Spule mit 1000 Windungen, in die ein gerader Eisenkern eingeschoben wird, um die Induktivität zu erhöhen. Durch den Mittelabgriff der Spule kann die Windungszahl halbiert und dadurch die Induktivität auf ungefähr ein Viertel reduziert werden. Hier ist zu beachten, dass diese Annahme nur für eine Spule gilt, bei der sich die Länge der Spule durch die Verwendung des Mittelabgriffs nicht ändert. Kleinere Abweichungen bei der Induktivität sind deshalb möglich.

Bei jeder Messreihe lädt man zunächst den Kondensator mit der Spannungsquelle über einen  $100\ \Omega$ -Widerstand auf. Dadurch wird die Ladestromstärke begrenzt und die Lebensdauer der Kondensatoren erhöht. Anschließend wird der Wechselschalter umgelegt, sodass der Schwingkreis eine gedämpfte Schwingung ausführt. Im Abb. 3 ist die Spannung am Kondensator exemplarische für diesen Vorgang dargestellt:



**Abb. 3:** Spannungsverlauf während der Aufladung des Kondensators und anschließender gedämpfter Schwingung

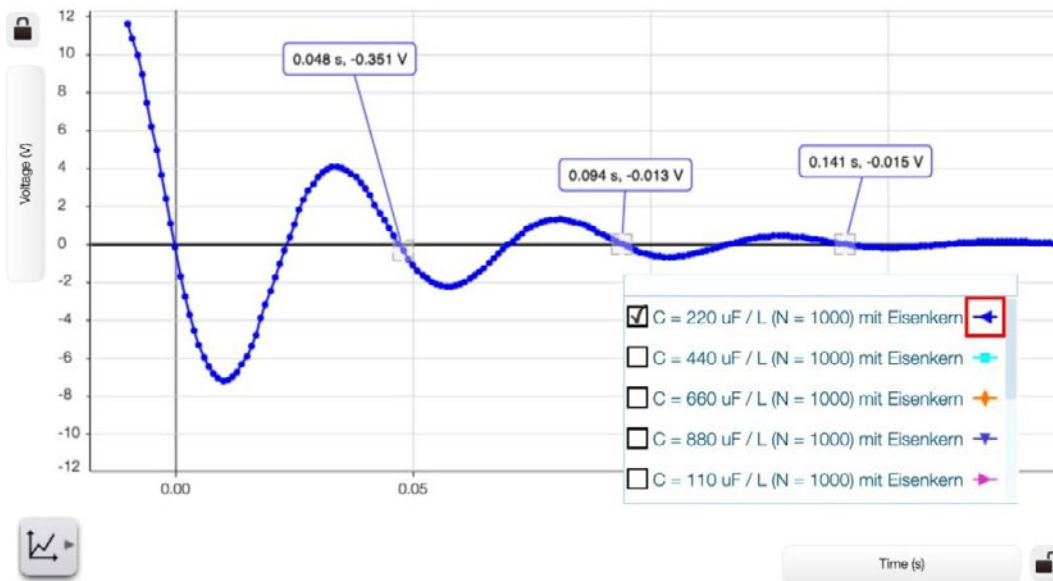
Um erste Erfahrungen mit der Schaltung zu machen und die Funktionsweise der einzelnen Bauteile kennenzulernen, ist es sicherlich sinnvoll, dass die Schülerinnen und Schüler ein solches Diagramm aufzeichnen und den Spannungsverlauf deuten. Mögliche Diskussionspunkte sind hier:

- Der Ladevorgang des Kondensators muss zu Beginn abgewartet werden.
- Aufgrund der starken Dämpfung oszilliert der Schwingkreis manchmal nur für wenige Periodendauern.
- Ableseproblematik durch die begrenzte Abtastrate
- Möchte man mehrere Messreihen in einem Diagramm miteinander vergleichen, so ist die Wahl eines gemeinsamen Startzeitpunktes sinnvoll.

Im weiteren Verlauf des Versuchs genügt es, sich auf die gedämpfte Schwingung zu beschränken und den Aufladevorgang des Kondensators auszublenden, da für den Nachweis der Thomson-Gleichung nur die Schwingungsdauern aus den Messreihen ermittelt werden müssen. Bei dem verwendeten Messwerterfassungssystem können Bedingungen formuliert werden, um die Messung automatisch zu starten. Es empfiehlt sich, die Aufzeichnung der Messung erst dann zu starten, sobald die Spannung erstmals negativ wird. Dadurch erscheint im Diagramm bei allen Messreihen die erste Nullstelle (bedingt durch die Abtastrate von 1 kHz mit einer maximalen Abweichung von 1 ms) annähernd an der gleichen Stelle. Dieses Vorgehen vereinfacht die spätere Auswertung, denn so lassen sich die unterschiedlichen Messreihen besser miteinander vergleichen und die Schwingungsdauern einfacher ablesen. Um die Messunsicherheiten beim Ablesen der Periodendauern zu reduzieren, ist es hier sinnvoll, wie bei der Startbedingung den Zeitpunkt des ersten negativen Spannungswertes nach der Nullstelle zu bestimmen. Um bei den Schülerinnen und Schülern den Fokus auf die physikalischen Methoden zu lenken, können sie hier im Messwerterfassungssystem auf eine Vorlage (siehe *Schwingkreis-Vorlage.spklab*) zurückgreifen. Hinweise zu den Einstellungen im Messprogramm „SPARKvue“ befinden sich im Anhang.

## Messung und Auswertung

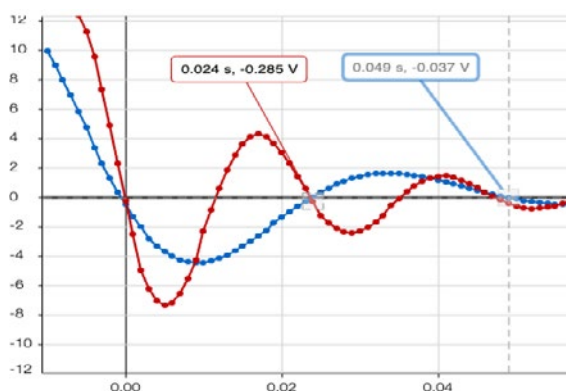
Die in Abb. 4 dargestellte Messreihe zeigt beispielhaft das Auswerteverfahren. Die markierten Messpunkte sind nach dem oben beschriebenen Vorgehen ausgewählt worden. Anhand der Zeitpunkte lässt sich gut erkennen, dass trotz starker Dämpfung die Schwingungsdauer für die ersten drei Perioden mit  $(47 \pm 1)$  ms quasi konstant bleibt. Die Messabweichung bei der Bestimmung der Nullstellen wird jedoch aufgrund der starken Dämpfung immer größer (siehe Abb. 4). Deshalb ist es teilweise sinnvoll, die Auswertung auf wenige Perioden zu begrenzen. Es bietet sich an dieser Stelle an, die Auswahl der bei der Auswertung berücksichtigten Perioden vom Schüler begründen zu lassen.



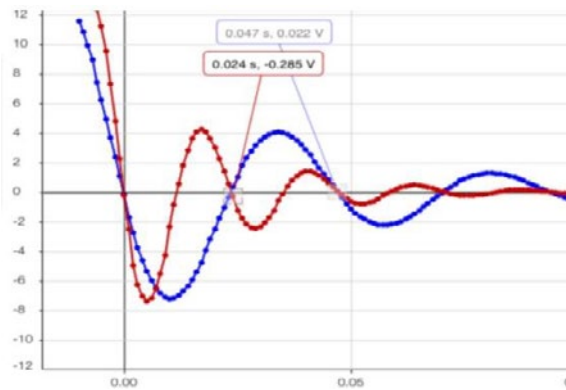
**Abb. 4:** Spannungsverlauf einer Messreihe bei 220  $\mu\text{F}$  und 1000 Windungen

Bei den ersten Versuchsreihen können die Schülerinnen und Schüler außerdem leicht überprüfen, dass die Periodendauer nicht von der Aufladespannung abhängt und somit in Analogie zum Federpendel unabhängig von der Amplitude ist.

Nun kann mit der systematischen Aufzeichnung von Messreihen bei unterschiedlichen Kapazitäten und Induktivitäten begonnen werden. Der Vergleich einzelner Messreihen (siehe Abb. 5 und 6) soll beispielhaft zeigen, wie die Schülerinnen und Schüler gegebenenfalls bereits nach einer groben Analyse der Diagramme aufgestellte Hypothesen überprüfen können oder vielleicht sogar verwerfen müssen. Lineare Zusammenhänge zwischen der Periodendauer und der Kapazität bzw. Induktivität können hier bereits verneint werden.



**Abb. 5:** Vierfache Kapazität (220  $\mu\text{F}$ /880  $\mu\text{F}$ ) bei gleicher Windungszahl (1000) führt zur doppelten Periodendauer



**Abb. 6:** Vierfache Induktivität wegen doppelter Windungszahl (500/1000) bei gleicher Spulenlänge und Kapazität (220  $\mu\text{F}$ ) führt zur doppelten Periodendauer

Die in Abb. 5 und 6 dargestellten Messreihen lassen vermuten, dass eine vierfache Kapazität bzw. Induktivität eine doppelt so große Schwingungsdauer bewirkt. Mögliche Hypothesen, die an dieser Stelle naheliegen, sind

$$T \sim \sqrt{C}$$

für die Kapazität und

$$T \sim \sqrt{L}$$

für die Induktivität. Ausgehend davon wäre die Überprüfung des Zusammenhangs

$$T \sim \sqrt{L \cdot C}$$

eine mögliche Motivation für weitere Untersuchungen. Eine Variation der Bauteile liefert folgende Messwerte:

L in Vielfachen von $L_0$	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4
C in $\mu\text{F}$	110	220	440	660	880	110	220	440	660	880
T in s	0,016	0,024	0,033	0,042	0,049	0,032	0,048	0,067	0,083	0,098
$\frac{T}{\sqrt{L \cdot C}}$ in $\frac{\text{s}}{\sqrt{\text{H} \cdot \text{F}}}$	1,53	1,62	1,57	1,63	1,65	1,53	1,62	1,60	1,62	1,65

L: Induktivität der Spule

$L_0$ : Induktivität der Spule mit 500 Wdg. (Mittelabgriff)

C: Kapazität der Kondensatorkombination

T: Periodendauer der gedämpften Schwingung

Die Induktivität  $L_0$  wird hier als Normgröße herangezogen, da die Induktivität in SI-Einheiten zunächst nicht bekannt ist. Der auf Spulen teils angegebene Wert (hier 0,044 H) gilt nur für die Verwendung als Luftspule ohne Eisenkern. Um die oben genannte Hypothese zu überprüfen, wurde die Proportionalitätskonstante

$$k = \frac{T}{\sqrt{L \cdot C}}$$

berechnet. Das arithmetische Mittel liefert für  $k$  einen Wert von

$$1,60 \frac{s}{\sqrt{L_0 \cdot F}},$$

wobei eine maximale Messabweichung von 4,4 % vorliegt (siehe erste Spalte in der Tabelle). Durch die maximale Abtastrate von 1 kHz beinhaltet die Messung der Schwingungsdauer bereits eine Unsicherheit von  $\pm 1$  ms. Für  $T$  gleich 16 ms beträgt die relative Messunsicherheit somit mindestens 6,3 %. Die Proportionalitätskonstante ist also im Rahmen der Messabweichung konstant. Die Messreihen belegen somit den Zusammenhang:

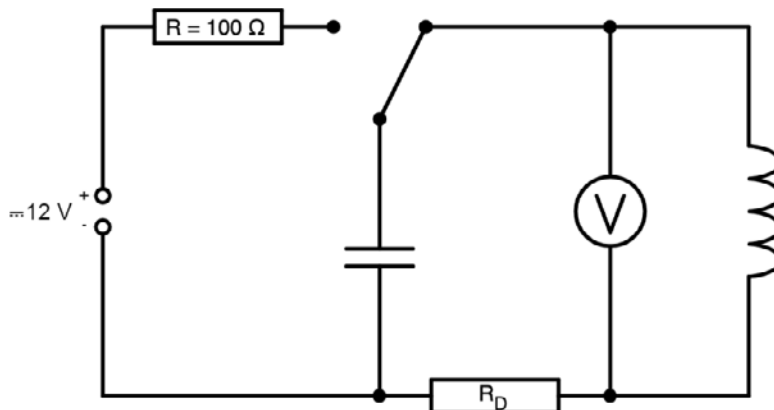
$$f = \frac{1}{k \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

Eine genauere Auswertung würde man evtl. erhalten, indem man den Zusammenhang linearisiert und die Größe  $\sqrt{L \cdot C}$  über  $T$  aufträgt. Dabei ist die Zuhilfenahme eines Tabellenkalkulationsprogramms von Vorteil, um damit eine lineare Regression durchzuführen. Die Konstante  $k$  ergibt sich als Steigung der Ursprungsgeraden.

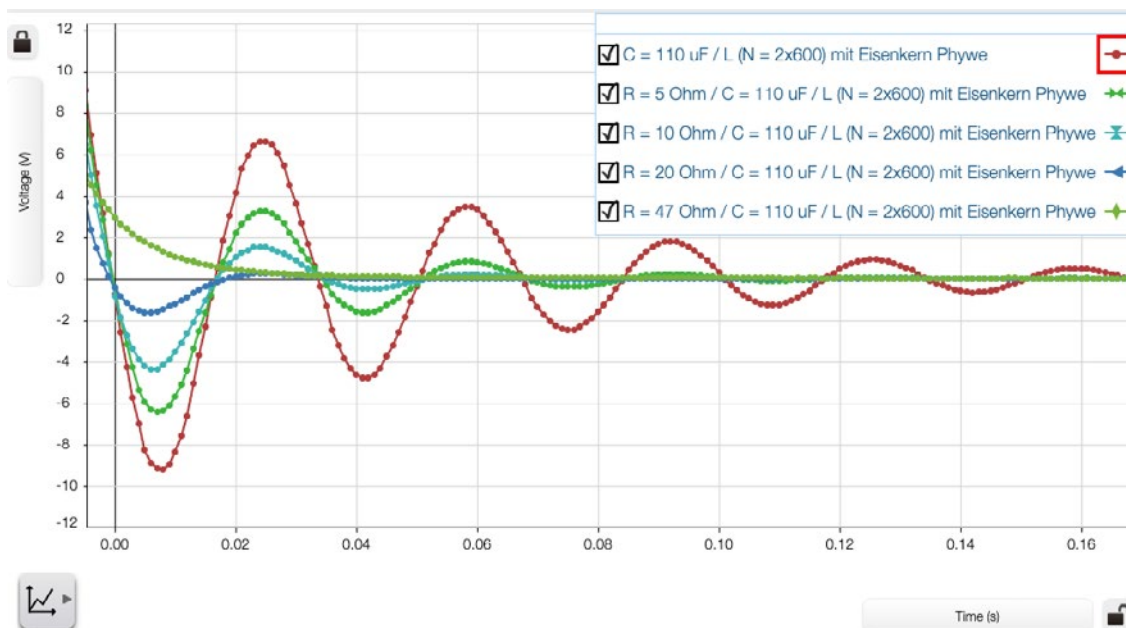
Ist die Induktivität der Spule bekannt, so könnte man zeigen, dass  $k$  gleich  $2\pi$  ist. Eine Bestimmung der Induktivität der Spule wäre zum Beispiel durch die Auswertung eines Ausschaltvorgangs möglich. Die Messung dazu ist im Anhang dokumentiert und würde den Versuch passend ergänzen.

## Variante: Gedämpfte elektromagnetische Schwingung

An dieser Stelle kann durch eine geringfügige Änderung im Versuchsaufbau auch die im Lehrplan (Ph 12 LB 4 eA) geforderte Behandlung der Dämpfung in Abhängigkeit vom Ohm'schen Widerstand untersucht werden. Dazu wird im Schwingkreis ein zusätzlicher Widerstand angebracht, um eine kontrollierbare Dämpfung hervorzurufen. Eine Variation von Kapazität oder Induktivität wird dabei nicht angestrebt. Hierfür kann eine beliebige Kombination aus dem vorherigen Versuch verwendet werden.



**Abb. 8:** Schaltskizze zum gedämpften elektromagnetischen Schwingkreis




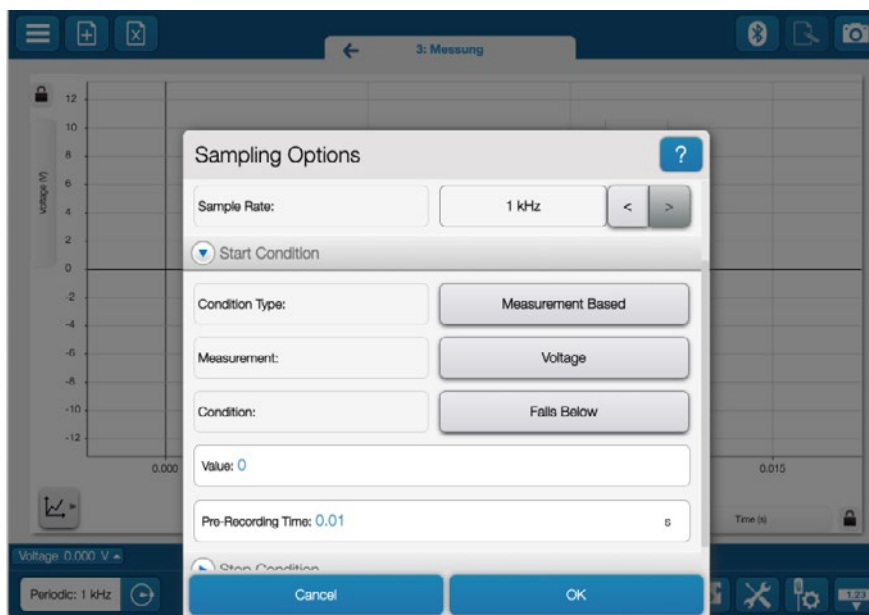
**Abb. 9:** Abhängigkeit der Dämpfung vom Ohm'schen Widerstand

Aus der Abb. 9 geht klar hervor, dass die Dämpfung nur vom Ohm'schen Widerstand abhängig ist. Die Schwingungsdauer bleibt hingegen bei allen Messreihen innerhalb der Messunsicherheit von  $\pm 1$  ms konstant.

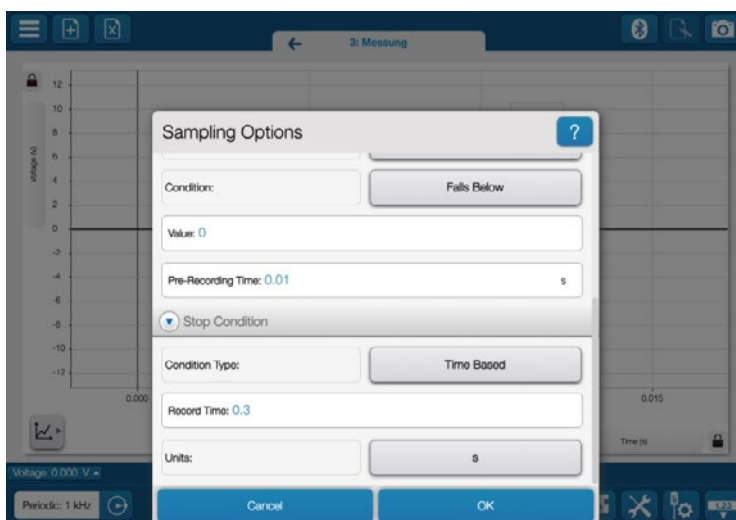
## Anhang

### Hinweise zu den Einstellungen im Mess- und Auswertungsprogramm „SPARKvue“

- Die Messeinstellung werden in der App links unten über den Button  aufgerufen.
- Die Abtastrate (Sample Rate) ist auf 1 kHz zu setzen.
- Der automatische Start der Messung kann so eingerichtet werden, dass die Messung startet, sobald der Spannungswert unter null fällt. Um zur besseren Übersicht die Messwerte kurz davor ebenfalls aufzuzeichnen, wird hier eine Pre-Recording Time von 0,01 s eingestellt.



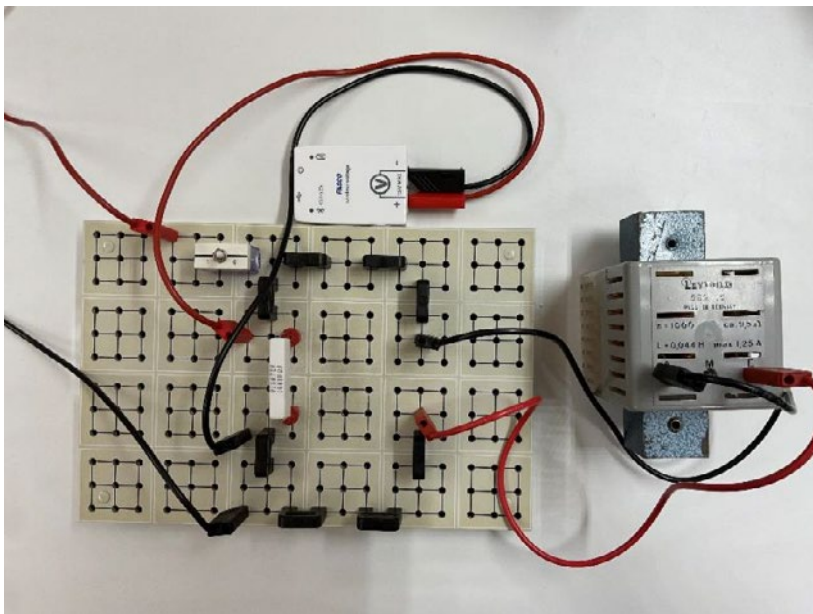
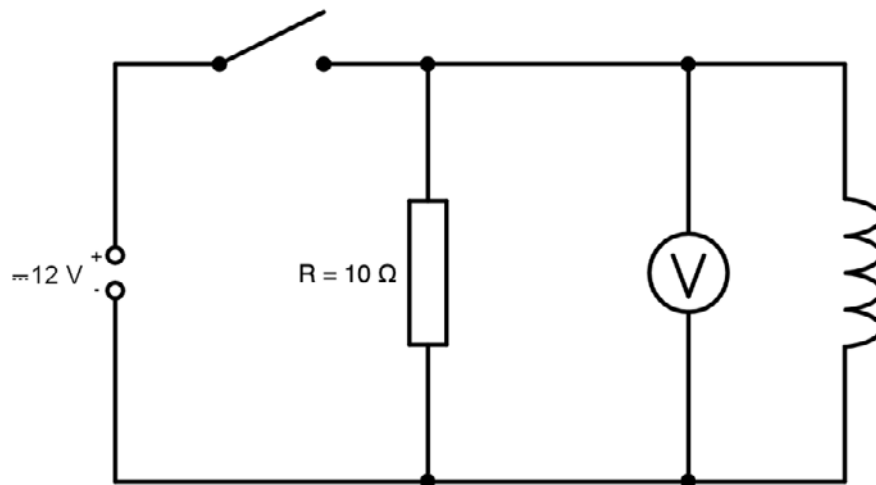
Das automatische Beenden der Messung nach 0,3 s wird unter Stop Condition und Record Time eingestellt.



Die hier genannten Anpassungen sind bereits in der Datei „Schwingkreis-Vorlage.spklab“ implementiert.

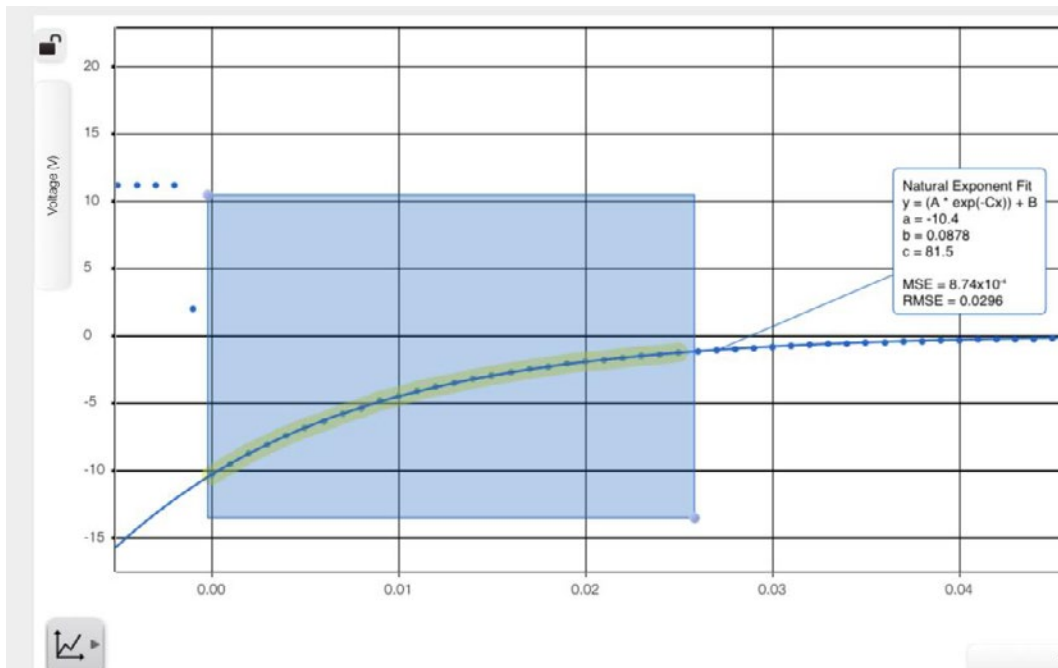
## Bestimmung der Induktivität der Spule

Aufbau:



Die Messung des Gesamtwiderstands mit Hilfe des Multimeters ergab  $20,1\ \Omega$  (inklusive Innenwiderstand der Spule).

Ergebnis:



Der theoretische Spannungsverlauf<sup>2</sup> wird durch die Gleichung

$$U(t) = U_0 \cdot e^{\frac{-R}{L}t}$$

beschrieben. Das Messwertersorgungssystem liefert für die Regression bzgl. der natürlichen Exponentialfunktion

$$y = A \cdot e^{-C \cdot x} + B$$

die Parameter  $A = -10,4 \text{ V}$ ,  $B = 0,0878 \text{ V}$  und  $C = 81,5 \text{ s}^{-1}$ . Nur Parameter C wird hier für die Berechnung der Induktivität benötigt. Sie ergibt sich zu  $L = 20,1 \Omega / 81,5 \text{ s}^{-1} = 0,247 \text{ H}$ .

Damit lässt sich die oben beschriebene Proportionalitätskonstante k berechnen:

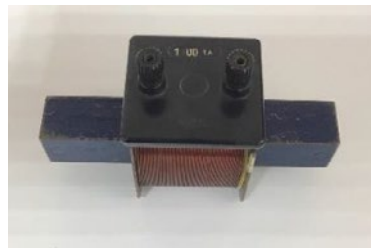
$$1,62 \frac{\text{s}}{\sqrt{L_0 \cdot F}} = \frac{1,62}{\sqrt{0,25 \cdot 0,247}} \frac{\text{s}}{\sqrt{H \cdot F}} = 6,52 \approx 2\pi$$

Die Abweichung vom theoretischen Wert  $2\pi$  beträgt somit nur 3,8 %.

<sup>2</sup> [https://www.elektroniktutor.de/analogtechnik/l\\_gleich.html](https://www.elektroniktutor.de/analogtechnik/l_gleich.html)

## Hinweise und Alternativen

- Jeder Kondensator besitzt eine maximale Ladestromstärke, die dem Datenblatt des jeweiligen Produkts zu entnehmen ist. Der 100  $\Omega$ -Widerstand begrenzt die Ladestromstärke und erhöht dadurch die Lebensdauer der Kondensatoren. Er hat aber keinen Einfluss auf den Schwingkreis.
- Um den Versuch mit „gewöhnlichen“ Experimentierspulen mit Induktivitäten im mH-Bereich durchführen zu können, werden wegen der begrenzten Abtastrate des Messwerterfassungssystems hohe Kapazitäten im niedrigen mF-Bereich verwendet.
- Ohne Eisenkern ist der Versuch so nicht möglich, da aufgrund der begrenzten Abtastrate sehr hohe Kapazitäten nötig wären, die sehr kostspielig sind und bei der Verwendung einer Luftspule die Dämpfung durch die elektromagnetische Abstrahlung sehr groß ist.
- Bei der Verwendung eines Ringkerns gelingt der Versuch nicht. Es hat sich herausgestellt, dass die Induktivität im Frequenzbereich unter 100 Hz frequenzabhängig ist.
- Die Messungen sind mit vielen Spulen der Lehrmittelhersteller möglich. Ein Mittelabgriff ist nicht zwingend nötig; die Nutzung des Mittelabgriffs darf die Spulenlänge nicht verändern. Das Experiment wurde auch erfolgreich mit Spulen mit 300, 600 und 1200 Windungen durchgeführt (siehe Bilder).



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

***Hier können Sie sich die Vorlagen-Datei downloaden***

## 2.6.2 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Erzwungene elektromagnetische Schwingung

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Experimentierkabel</li> <li>• Rastersteckplatte</li> <li>• 2-Kanal-Oszilloskop</li> <li>• alternativ:</li> <li>• digitales Messwerterfassungssystem mit zwei Spannungssensoren</li> <li>• ca. <math>47\ \Omega</math> Widerstand</li> <li>• Folienkondensator (z.B. <math>0,47\ \mu\text{F}</math>)</li> <li>• zwei Spulen (ca. 1000 Windungen) auf einem Eisenkern</li> <li>• Adapter zum Abgreifen des Audiosignals (Kann auch durch Krokodilklemmen und Experimentierkabels ersetzt werden.)</li> <li>• Audiokabel mit Klinkenstecker</li> <li>• Adapter mit 4-mm Bananenstecker zum Anschluss von bedrahteten Bauelementen (kann auch durch Krokodilklemmen und Experimentierkabels ersetzt werden.)</li> </ul>
digitales Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• evtl. Tabellenkalkulationsprogramm</li> <li>• Smartphone oder Tablet mit Kopfhöreranschluss als Sinusgenerator (geeignete App z. B. phyphox, f-Generator, ...)</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 LB 2 eA Elektromagnetische Induktion und Schwingungen

Die Schülerinnen und Schüler erschließen sich aus Beobachtungen bei einem Experiment zu einer erzwungenen mechanischen Schwingung grundlegende Abhängigkeiten der resultierenden Amplitude sowie der Phasenverschiebung zwischen Anregung und Schwingung von der Anregungsfrequenz und weiteren Parametern. Diese geben sie in passender Struktur und angemessener Fachsprache wieder. Sie erklären durch Analogiebetrachtungen Strukturen in experimentellen Daten zu einer erzwungenen Schwingung in einem elektromagnetischen Schwingkreis.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Der hier beschriebene Versuch deckt diese Kompetenzerwartung nicht vollständig ab. Die Hintergrundinformationen zur erzwungenen mechanischen Schwingung befinden sich in einem weiteren Dokument.

## Ph 12 LB 4 eA Experimentelles Arbeiten

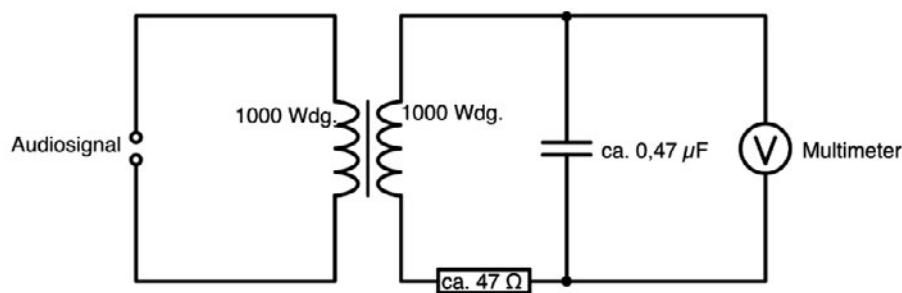
Für die erzwungene Schwingung ermitteln sie experimentell die Resonanzkurve und die Phasenbeziehung zwischen Erreger und Oszillator für zwei unterschiedlich starke Dämpfungen. Sie beschreiben die prinzipielle Funktionsweise eines digitalen Messwerterfassungssystems.<sup>2</sup>

### Ziel

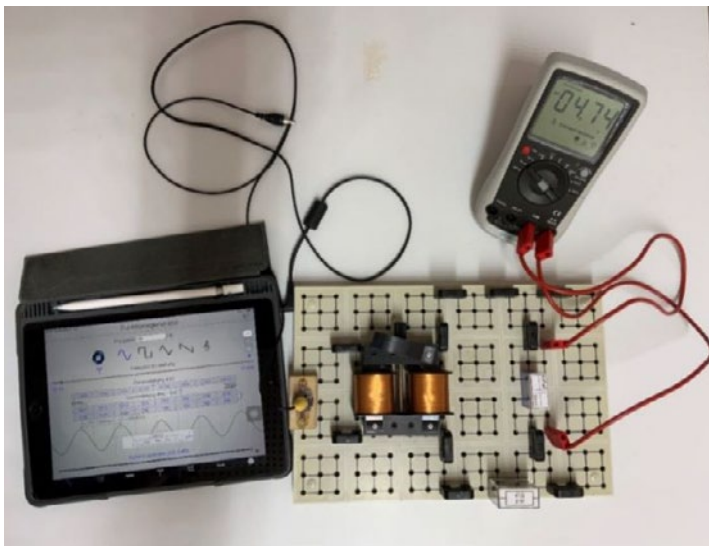
Für die erzwungene Schwingung ermitteln sie experimentell die Resonanzkurve und die Phasenbeziehung zwischen Erreger und Oszillator für zwei unterschiedlich starke Dämpfungen.

### 1. Teil: Resonanzkurven mit unterschiedlicher Dämpfung

#### Aufbau



**Abb. 1:** Schaltskizze



**Abb. 2:** Aufbau mit zusätzlichem Dämpfungswiderstand von 47  $\Omega$

<sup>2</sup>Im Lehrplan wird in diesem Zusammenhang auch die Bestätigung der Thomson-Gleichung mit Hilfe einer computergestützten Messwerterfassung genannt. Die Hintergrundinformationen hierfür befinden sich in einem weiteren Dokument.



**Abb. 3:** Adapter zum Anschließen des Audioausgangs des Tablets an das Steckbrett

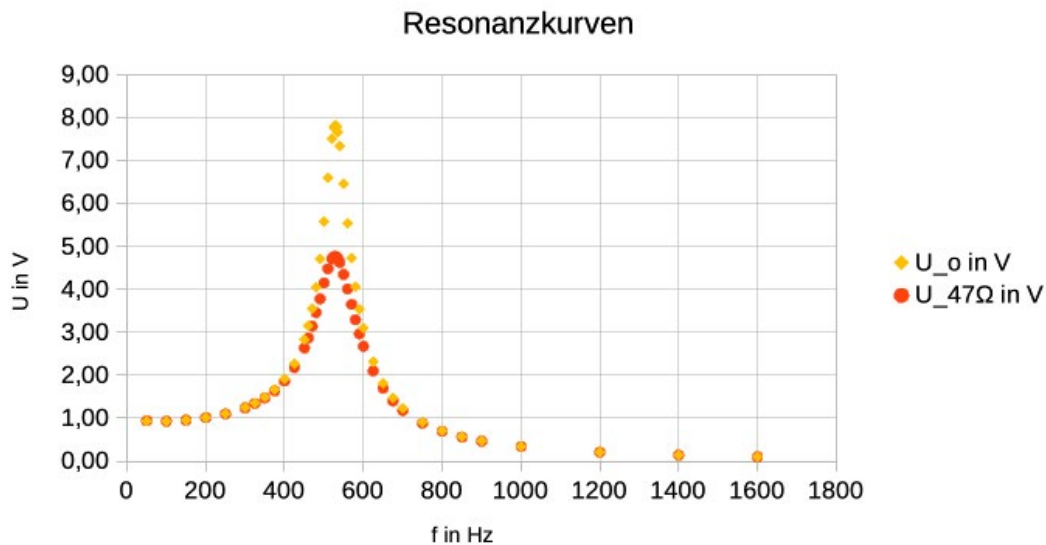
In diesem Versuch wird ein Schwingkreis induktiv über die via Eisenkern gekoppelten Spulen mit unterschiedlichen Frequenzen angeregt. Die induktive Kopplung ist zum Schutz des Geräts nötig. Die Eigenfrequenz des Schwingkreises sollte dabei nicht zu klein sein, um ein ausgeprägtes Resonanzverhalten zu beobachten. Die Spulen auf der Primär- und Sekundärseite besitzen jeweils 1000 Windungen. Das dazu nötige Sinussignal wird mit Hilfe eines Tablets (oder auch Smartphones) am Audioausgang erzeugt. Dazu steht ein vielfältiges Angebot an Apps zur Verfügung (z. B. phyphox, f-Generator). Bei voller Lautstärke liefert das hier verwendete Gerät eine effektive Spannung von 1,05 V. Natürlich kann auch ein gewöhnlicher Sinusgenerator verwendet werden. Das Audiosignal wird anschließend mit Hilfe eines selbst gefertigten Adapters (siehe Abb. 3) auf die Primärseite des Transformators übertragen und so induktiv in den Schwingkreis eingekoppelt. Alternativ könnte man hier auch ein Audiokabel auftrennen und das Signal mit Krokodilklemmen abgreifen oder Bananenstecker an den Kabeln anlöten. Um den Effektivwert der Spannung im Schwingkreis zu messen, wird ein gewöhnliches Digitalmultimeter im Wechselstrombetrieb verwendet. Die Messwerte vieler Multimeter zeigen auch im Bereich weniger kHz noch keine Abhängigkeit von der Frequenz, so dass sie für diesen Versuch geeignet sind. Es empfiehlt sich jedoch, die Eignung des Multimeters vor dem Einsatz im Unterricht bei unterschiedlichen Frequenzen aber konstanter Scheitelspannung am Eingang einmalig mit einem Oszilloskop zu überprüfen. Eine weitere mögliche Fehlerquelle könnte eine nicht konstante Scheitelspannung am Audioausgang sein. In der Regel liegt aber bei konstanter Lautstärke auch eine konstante Scheitelspannung am Audioausgang an. Mit Hilfe eines zweiten Multimeters könnte diese Fehlerquelle leicht ausgeschlossen werden.

Der Versuch gelingt auch bei Verwendung anderer Kondensatoren und Spulen, allerdings sollte man darauf achten, dass die Resonanzfrequenz im Bereich zwischen 0,1 kHz und 1 kHz liegt. Ist sie zu klein, so ist die Dämpfung im Schwingkreis in der Regel zu groß. Bei einer zu großen Resonanzfrequenz hingegen besteht die Gefahr, dass die Spannungsmessung mit dem Multimeter ungenau wird. Auch der 47  $\Omega$ -Widerstand, der in einer zweiten Messreihe für eine zusätzliche Dämpfung sorgt, kann je nach zur Verfügung stehenden Material variiert werden.

### **Messung und Auswertung**

In einer ersten Messreihe ohne zusätzlichen Widerstand wird die Frequenz schrittweise am Tablet erhöht und jeweils die Spannung notiert. Im Bereich der Resonanzfrequenz ist eine geringere Schrittweite nötig, um die Kurve genauer abzubilden. Genauso wird in einer zweiten Messreihe verfahren, allerdings wird dabei ein 47  $\Omega$ -Widerstand zur Spule in Reihe geschaltet. In Abb. 4 wurden die Ergebnisse mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

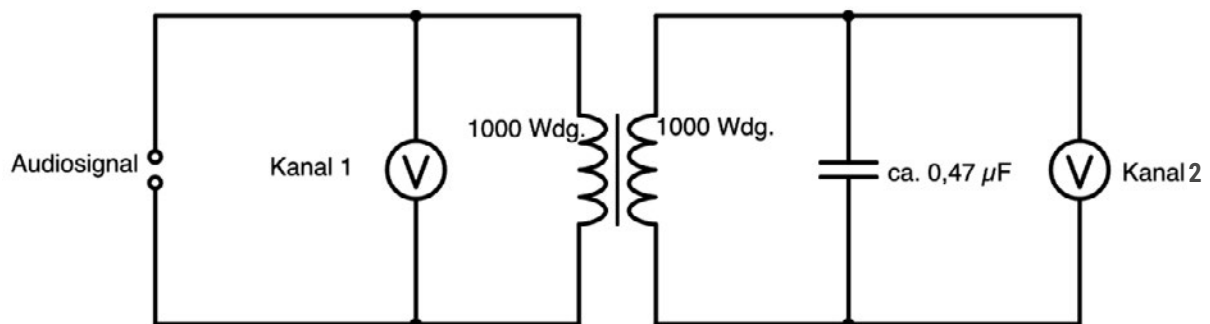
aufgetragen. Das Resonanzverhalten ist in den Messreihen deutlich zu erkennen. Nun lässt sich die Resonanzfrequenz anhand des maximalen Spannungswertes bestimmen. Sie beträgt hier unabhängig von der Dämpfung 528 Hz.



**Abb. 4:** Resonanzkurven der beiden Messreihen ohne Widerstand und mit 47  $\Omega$  -Widerstand in Reihe zur Spule.

## 2. Teil: Phasenbeziehung zwischen Erreger und Oszillator

### Aufbau



**Abb. 5:** Aufbau zur Untersuchung der Phasenbeziehung mit einem 2-Kanal-Oszilloskop

Um die Phasenbeziehung zwischen Erreger und Oszillator zu untersuchen, kann der Aufbau aus dem ersten Versuchsteil im Wesentlichen verwendet werden. Die Spannungen werden hier allerdings mit einem Oszilloskop gemessen. Sowohl ein einfaches Handoszilloskop oder auch ein für Demonstrationsversuche vorgesehenes Oszilloskop sind hierfür geeignet. Im Versuch werden in drei Messreihen die Spannungsverläufe am Kondensator und des Anregungssignals für  $f \ll f_R$ ,  $f = f_R$  und  $f \gg f_R$  aufgezeichnet.

## Messung und Auswertung

Da die Resonanzfrequenz  $f_R$  aus dem ersten Versuchsteil bereit bekannt ist, werden nun bei 100 Hz, 528 Hz und 1000 Hz Messungen durchgeführt. In den Abb. 6, 7 und 8 sind dazu die Bildschirmfotos von einem Handoszilloskop dargestellt.

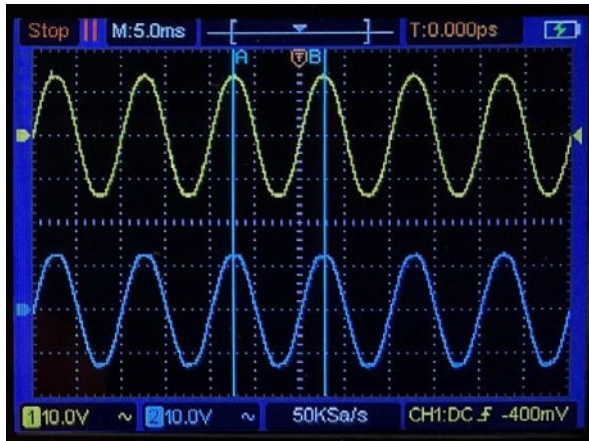


Abb. 6: Phasengleicher Verlauf für eine Anregungsfrequenz von 100 Hz.

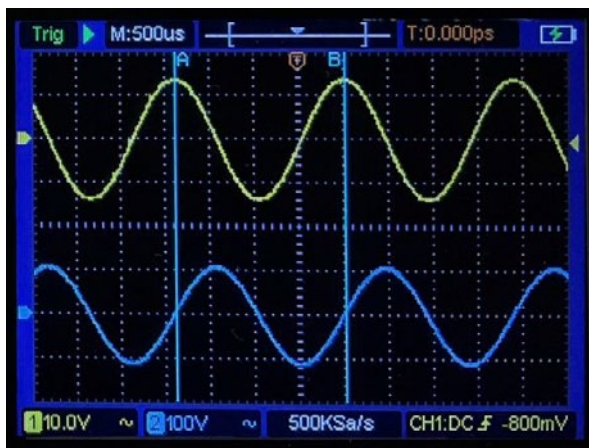


Abb. 7: Aufzeichnung bei  $f = 528$  Hz

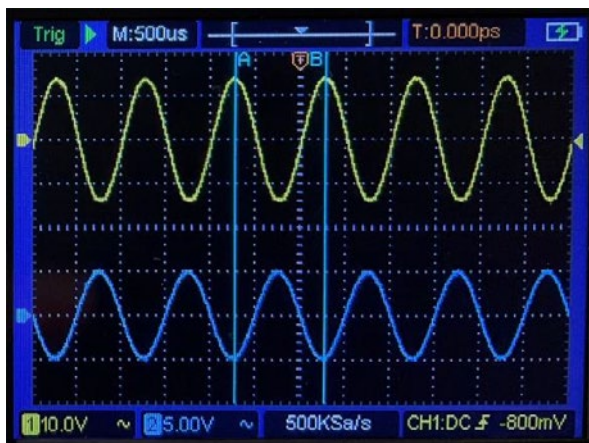


Abb. 8: Gegenphasiger Verlauf für eine Anregungsfrequenz von 1000 Hz.

Mit Hilfe der senkrechten Marker A und B, lässt sich in Abb. 7 die Phasenverschiebung von  $\pi/2$  sehr gut erkennen. Im Rahmen der Auswertung könnten auch noch die Frequenzen zu den Aufzeichnungen aus Abb. 6, 7, und 8 verifiziert werden.

Eine interessante Ergänzung zu dem Versuch wäre das Anregungssignal an Stelle des Tablet mit Hilfe eines Mikrophons zu erzeugen. Dabei können die Schülerinnen und Schüler durch „Hineinsingen“ die Frequenz mit dem größten Ausschlag am Multimeter herausfinden.



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

## 2.7 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment **Wechselstromkreise**

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Breadboard</li> <li>• WIMA Folienkondensator <ul style="list-style-type: none"> <li>○ MKS02 PET-Kondensator, 470 nF</li> <li>○ MKS02 PET-Kondensator, 1 <math>\mu</math>F</li> <li>○ MKS02 PET-Kondensator, 100 nF</li> <li>○ MKS02 PET-Kondensator, 220 nF</li> </ul> </li> <li>• Induktivitäten <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Stehende Induktivität, 11PHC, Ferrit, 33 mH</li> <li>○ Stehende Induktivität, 09P, 15mH</li> </ul> </li> <li>• Steckwiderstände</li> <li>• 2 Multimeter mit AC-Messung</li> <li>• 2-Kanal Oszilloskop</li> <li>• 3,5mm Klinkenkabel (auf Cinch, Adapter, ...)</li> <li>• 4 Krokodilklemmen auf Dupont-Male</li> <li>• ausreichend Dupont Female – Female Kabel</li> <li>• Kontaktkabel fürs BreadBoard</li> </ul>
Digitales Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tablet / Smartphone mit PhyPhox <ul style="list-style-type: none"> <li>○ ggf. Adapter USB-C auf 3,5 mm Klinke</li> <li>○ Ggf. Bluetooth-Receiver mit 3,5 mm Klinkenausgang</li> <li>○ Simulation <a href="https://www.falstad.com/circuit/jsinterface.html">https://www.falstad.com/circuit/jsinterface.html</a></li> </ul> </li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12 4 Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln für sinusförmige Wechselspannung bei einem Ohm'schen, einem kapazitiven und einem induktiven Widerstand die Phasenbeziehung zwischen Spannung und Stromstärke und stellen die Frequenzabhängigkeiten graphisch dar. Sie untersuchen das frequenzabhängige Verhalten einer Schaltung von Bauteilen mit mindestens einem frequenzabhängigen Widerstand (z. B. Hochpass, Tiefpass, Bandpass, Bandfilter).

## Ziele

In diesem Schülerexperiment untersuchen die Schülerinnen und Schüler selbstständig das Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten in einem Wechselstromkreis. Aus den Kompetenzerwartungen ergeben sich die folgenden Experimente:

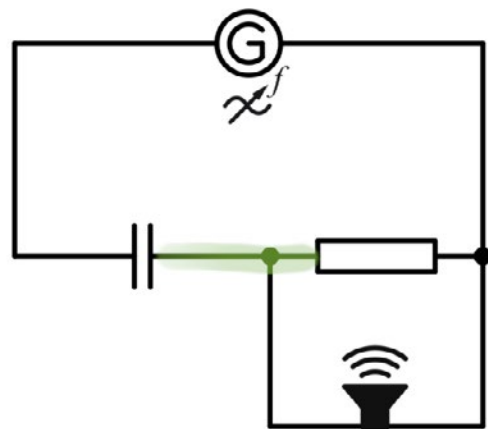
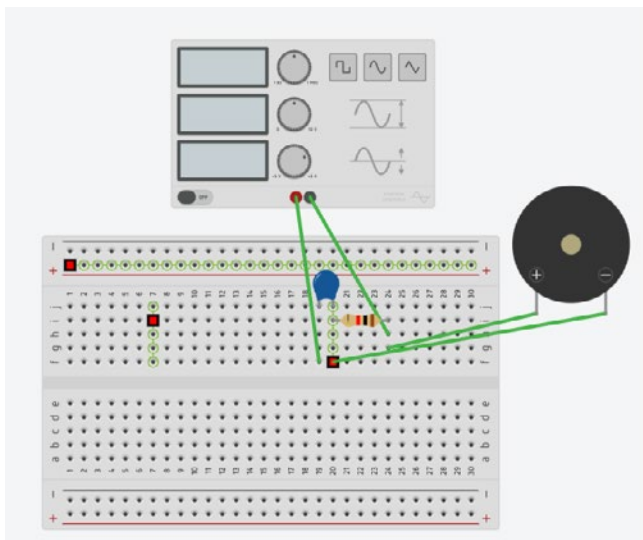
- Phasenbeziehung zwischen Spannung und Stromstärke bei ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität
- Frequenzabhängigkeit des Widerstands  $R$ , bzw. Blindwiderstands  $C$  und  $L$
- Frequenzabhängigkeit einer kombinierten Schaltung

Für die Messung der Phasenbeziehung muss ein Oszilloskop verwendet werden, während die beiden anderen Versuche einfach mit zwei Multimetern durchgeführt werden können.

## Basiskomponenten Breadboard und PhyPhox

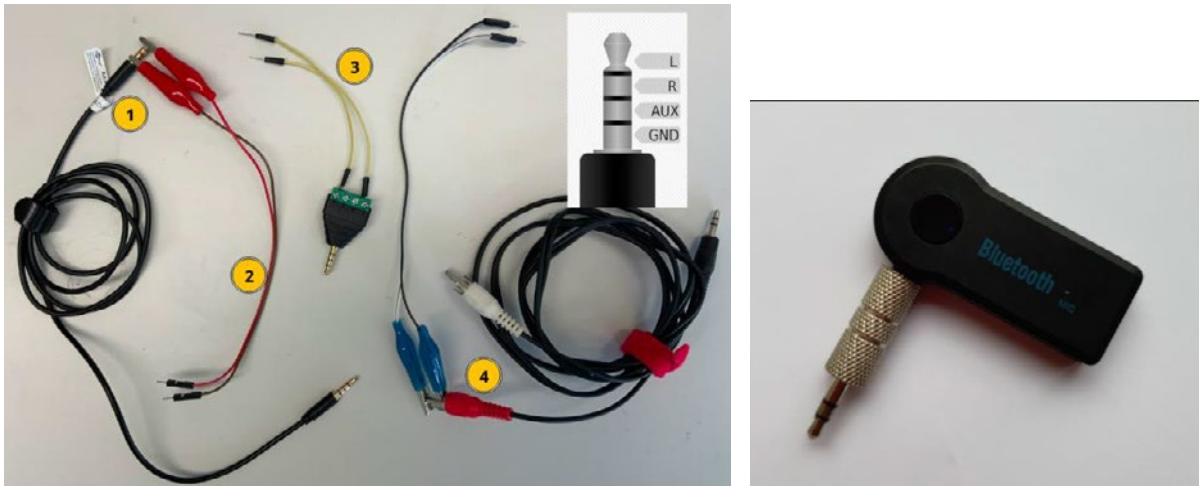
Der hier vorgestellte Aufbau erfolgt auf einem Breadboard, das eine einfache und kostengünstige Lösung darstellt. Insbesondere Bauteile wie bipolare Kondensatoren, Induktivitäten und Widerstände sind in Bausätzen günstig zu erwerben.

Die Schaltungen können auf dem Breadboard schnell aufgebaut werden, da die Bauelemente wie bei einem Steckbrett direkt gesteckt werden können und die interne Verdrahtung auch komplexe Schaltungen schnell und flexibel ermöglicht.



**Abb. 1:** In diesem Beispielaufbau (Hochpass mit Lautsprecher) wurde die interne Verdrahtung auf dem Steckbrett hervorgehoben. Grundsätzlich sind die Versorgungsleitungen am Rand horizontal intern verschaltet und bieten somit einen Plus- und Minuspol, der hier aber nicht verwendet wird. Die nummerierten Reihen sind intern vertikal verschaltet, so dass hier alle Pins f, g, h, i und j auf 7 verbunden sind oder auch hier exemplarisch die Reihe 20, die somit den Kondensator, den Widerstand und den Lautsprecher verbindet und in der Schaltung hervorgehoben wurde.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten so die Möglichkeit, mit einer Vielzahl von Bauelementen die Parameter eines einfachen Hoch- und Tiefpasses zu variieren und anhand von Berechnungen selbstständig geeignete Bauelemente auszuwählen.

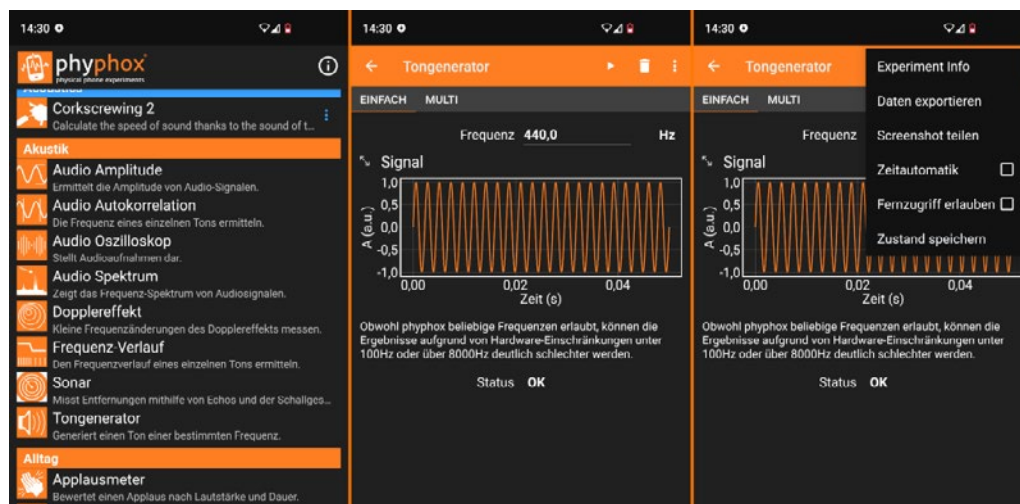


**Abb 2:** Die App *PhyPhox* ermöglicht es, das Smartphone/Tablet als Funktionsgenerator zu verwenden. Um das Signal als Eingangssignal  $U_e$  auf das Breadboard zu geben, existieren verschiedene Möglichkeiten:

- ① 3,5 mm Klinkenkabel mit ② Krokodilklemmen-Messkabel auf Dupont-Male Stecker, ③ 3,5 mm Klinke mit Schraubklemmen, ④ 3,5 mm Klinke mit Adapter auf Cinch

Aus Sicherheits- und Bequemlichkeitsgründen können auch einfache Bluetooth-Receiver für ca. 8 € eingesetzt werden (siehe rechts). Diese entkoppeln einerseits das Gerät und ermöglichen auch den einfachen Einsatz von Geräten ohne 3,5 mm Klinke.

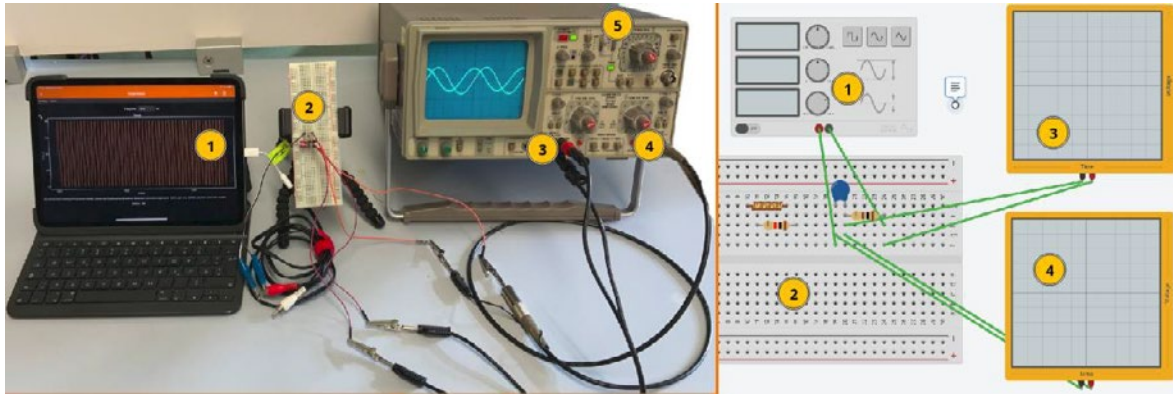
Um die Anschaffung von Funktionsgeneratoren zu vermeiden, wird hier als Quelle der Audioausgang eines Tablets oder Smartphones mit der frei verfügbaren App *PhyPhox* verwendet. Es bietet sich an, bei voller Lautstärke bzw. Ausgangsspannung im akustischen Frequenzbereich von  $50 \text{ Hz} < f < 5 \text{ kHz}$  zu messen. Um das Signal auf das Breadboard als Eingangssignal  $U_e$  zu geben, muss dieses über einen Adapter am Tablet/Smartphone abgegriffen werden.



**Abb. 3:** Bei beiden Versuchen verwendet man die App *PhyPhox* mit dem Programm „Tongenerator“ als kostengünstigen Ersatz eines Funktionsgenerators. Dabei kann man die Ausgabefrequenz festlegen, welche die Eingangsspannung  $U_e(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f t)$  im Versuch festlegt. Falls man die Daten per PC/Tablet sofort mitnotiert, kann man auch die App *PhyPhox* per Fernzugriff über jeden Browser fernsteuern. Das Wechselspannungssignal wird mit einem Adapter abgegriffen und als Eingangsspannung auf dem Breadboard verwendet.

## 1. Teil: Phasenbeziehungen zwischen Spannung und Stromstärke bei Bauteilen im Wechselstromkreis

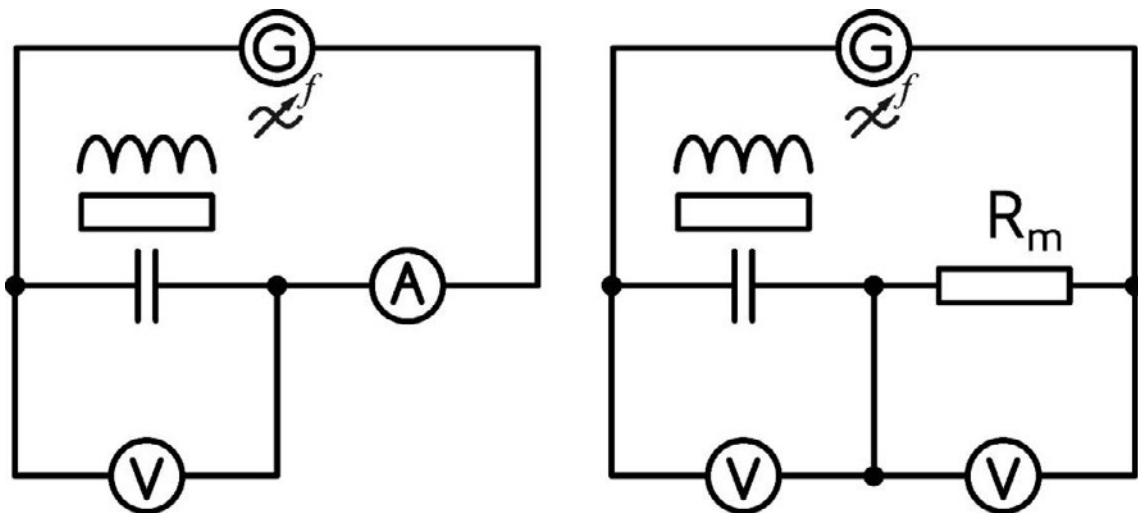
### Aufbau



**Abb 4:** Für die Messung der Phasenverschiebung von  $I(t)$  und  $U(t)$  wird eine Reihenschaltung aus dem zu charakterisierenden Bauelement und einem niederohmigen Messwiderstand für die Stromstärkemessung verwendet.

① Tablet als Funktionsgenerator, ② Breadboard mit Schaltung, ③ Stromstärke  $I(t)$  als Spannungsmessung über einem niederohmigen Widerstand  $R = 100 \Omega$ , ④ Spannungsmessung  $U(t)$  am Bauelement, ⑤ hier kapazitiver Widerstand

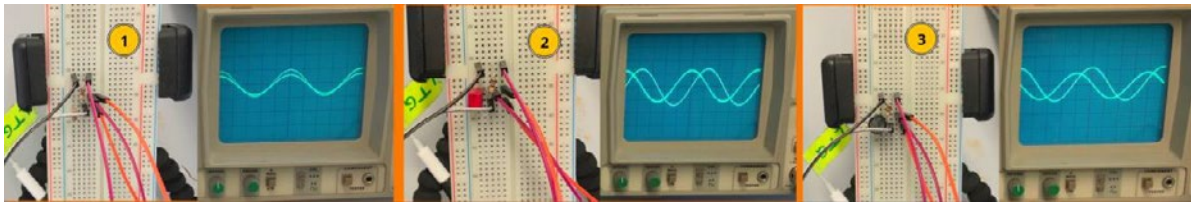
Für die Messung der Phasenbeziehung zwischen der Stromstärke  $I(t)$  und der Spannung  $U(t)$  wird ein Zweikanal-Oszilloskop benötigt, das gleichzeitig den Stromverlauf und den Spannungsverlauf darstellen kann.



**Abb. 5:** Zur Messung der Phasenbeziehung benötigt man einerseits den Spannungsverlauf  $U(t)$  am Bauteil und zugleich eine Stromstärkemessung. Ein Oszilloskop kann aber nur Spannungen darstellen. Daher verwendet man einen niederohmigen Widerstand (hier  $R_m \approx 100 \Omega$ ), über den man die Spannung abgreift (siehe rechter Schaltplan).

## Durchführung

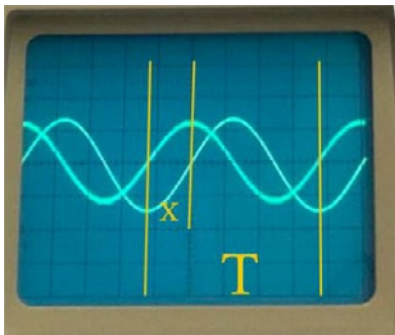
Zur Messung der Phasenbeziehung wird nach dem Aufbauplan die Schaltung auf dem Breadboard installiert.



**Abb. 6:** Die folgenden Ausschnitte zeigen jeweils die Phasenverschiebung für ① Ohm'schen Widerstand, ② Kapazität und ③ Induktivität.

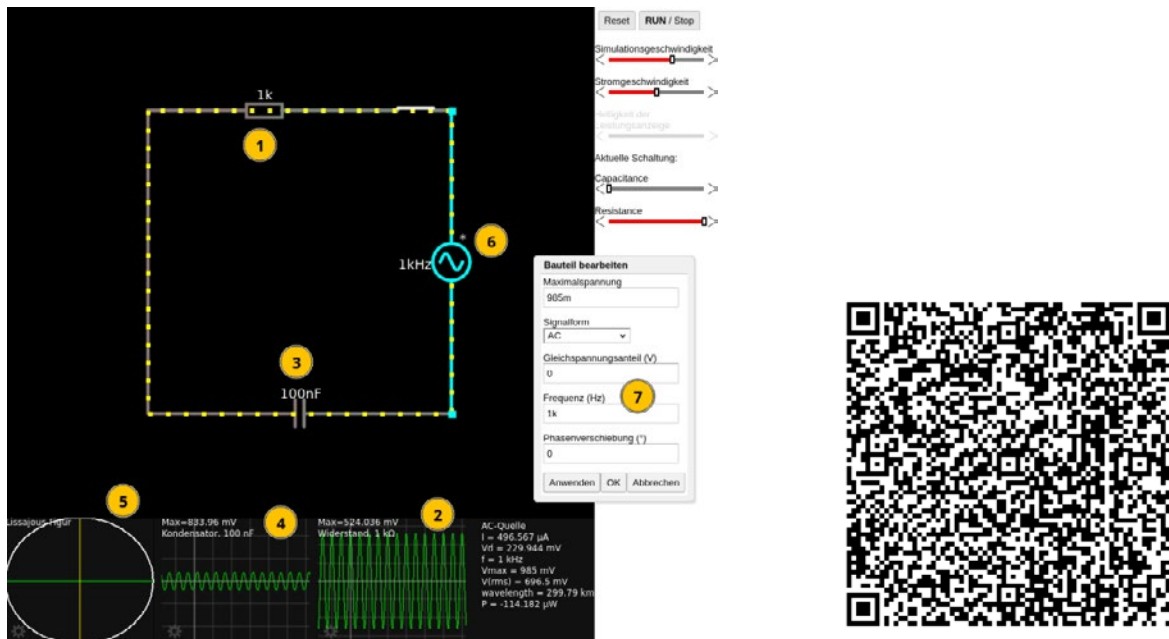
Nun stellt man eine ausreichend hohe Frequenz  $f$  ein, sodass der kapazitative und der induktive Widerstand groß im Vergleich zum Messwiderstand  $R_m$  ist. Auf dem Oszilloskop wird nun die Spannung am Widerstand  $U(t)$  und zugleich die Spannung am Messwiderstand als Stromstärkemessung  $I(t)$  dargestellt.

Die Phasenbeziehung kann nun zwischen den frequenzgleichen Spannungsmessungen direkt am Oszilloskop abgelesen werden. Gegebenenfalls muss noch die Zeitdauer für einen Skalenabschnitt angepasst werden.



**Abb. 7:** Ablesen der Phasenbeziehung anhand der Skalen des Oszilloskops

In dem vorliegenden Fall eines kapazitiven Widerstands ergibt sich für die Verschiebung  $x = 6$  Skalenteile und für die Periodenlänge  $T = 24$  Skalenteile, was zu einer Phasenverschiebung  $x = 6; T = 24 \rightarrow \varphi = \frac{x}{T} 2\pi = \frac{6}{24} 2\pi = \frac{\pi}{2}$  führt. Damit kann die Beziehung aus der Formelsammlung bestätigt werden.



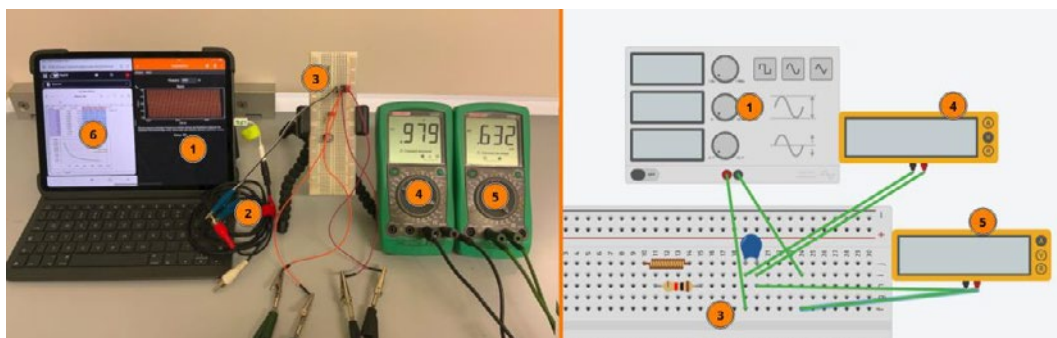
**Abb. 8:** Simulation des Aufbaus samt Phasenbeziehung mit Hilfe der App CircuitJS des Aufbaus samt Phasenbeziehung mit Hilfe der App CircuitJS.

- ① Widerstand mit  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ; ② virtuelles Oszilloskop für den Spannungsverlauf am Widerstand;
- ③ Kapazität mit  $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ ; ④ virtuelles Oszilloskop mit Spannungsverlauf an der Kapazität;
- ⑤ Lissajous-Figur durch Überlagerung des Spannungs- und Stromverlaufs an der Kapazität;
- ⑥ virtueller Funktionsgenerator; ⑦ alle Bauteile lassen sich individuell anpassen zur Simulation

Die Messung der Phasenbeziehung kann auch durch eine Simulation ergänzt werden. Dazu bietet sich die Verwendung des kostenfreien CircuitJS an.

## 2. Teil: Frequenzabhängigkeit des Widerstands von R, L und C

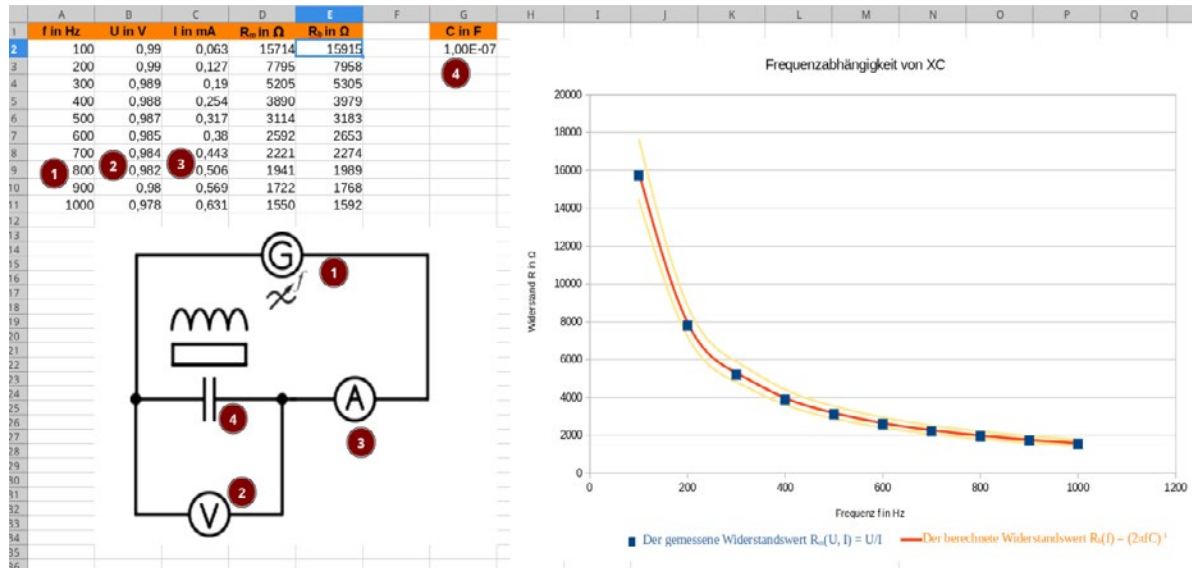
Die Messung der Frequenzabhängigkeit der Widerstandswerte kann mit Multimetern (im Modus AC~) durchgeführt werden. Diese werden klassisch als Voltmeter und Amperemeter eingebaut und messen die Werte bei unterschiedlichen Frequenzen des Signals.



**Abb. 9:** Die Messung der Frequenzabhängigkeit beispielhaft bei einer Kapazität  $C$  erfolgt mittels zweier Multimeter.

- ① Signalgenerator über PhyPhox mit  $100 \text{ Hz} < f < 1000 \text{ Hz}$ ; ② Signalübertragung mittels Cinch-Kabel;
- ③ Breadboard mit Aufbau; ④ Spannung  $U$  am Kondensator; ⑤ Stromstärkemessung  $I$  in  $\text{mA}$ ;
- ⑥ Eintrag in eine Tabellenkalkulation mit dem Vergleich der Werte  $R = U/I$  und  $R = (2\pi fC)^{-1}$

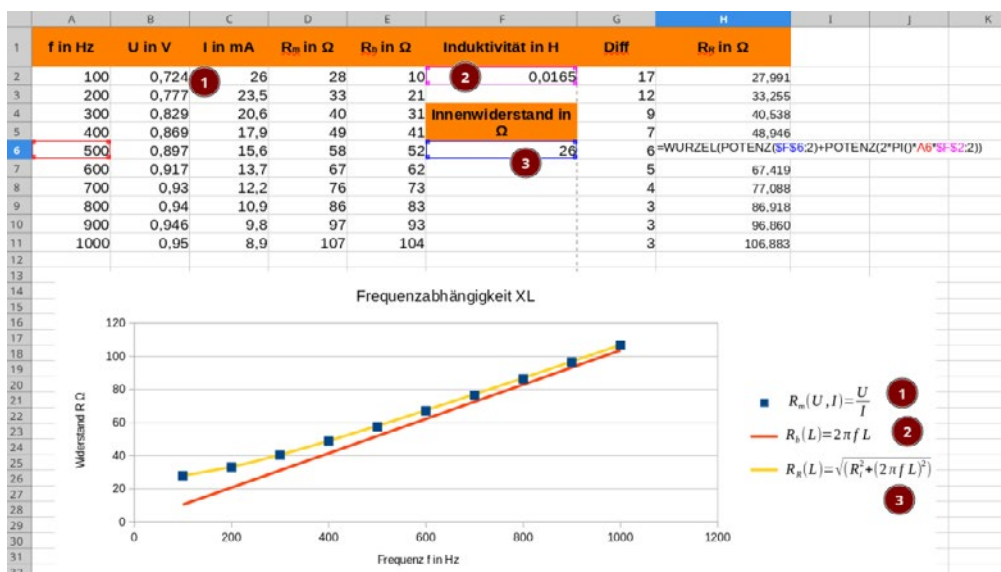
Bei diesem Versuch bietet es sich an, die gemessenen Werte mit den berechneten Werten mittels einer Tabellenkalkulation zu vergleichen. Einerseits kann durch die Messung der Spannung  $U$  und der Stromstärke  $I$  der Quotient gebildet werden, andererseits über die Frequenz  $f$  und die Kapazität  $C$  aus  $XC = \frac{1}{2\pi fC}$ .



**Abb. 10:** Der eigentliche Aufbau zur Messung der Frequenzabhängigkeit entspricht einer Messung des Widerstands mit einem Voltmeter parallel zum Bauteil und einem Amperemeter in Reihe. Die Werte können bequem mit einer [Tabellenkalkulation](#) ausgewertet werden, bei dem der gemessene Wert  $R_m(U, I) = U/I$  und der berechnete Wert  $R_b(f) = (2\pi fC)^{-1}$  verglichen werden. Die aus Messwerten ermittelten Widerstandswerte (blau) liegen exakt auf dem berechneten Kurvenverlauf aus der Kapazität (orange). Die gelben Kurven entsprechen einer Unsicherheit der Kapazität von  $\pm 10\%$ .

- ① Signalgenerator über PhyPhox mit  $100 \text{ Hz} < f < 1000 \text{ Hz}$ ; ② Voltmeter; ③ Amperemeter;  
④ Bauteil, hier Kapazität  $C$

Die Messung des ohmschen Widerstandes und der Kapazität ist einfach durchzuführen, Induktivitäten haben jedoch einen relativ hohen Innenwiderstand. Die hier verwendete Induktivität Fastron 09P mit 15 mH hat einen Innenwiderstand von ca.  $45 \Omega$ . Dies führt zu einem Offset der Messwerte. Die meisten Multimeter können auch den ohmschen Widerstand direkt messen, so dass der Innenwiderstand auch mit einem Multimeter schnell bestimmt werden kann. Bei der verwendeten Induktivität wich dieser um ca. 50 % von den Herstellerangaben ab.



**Abb. 11:** Der gemessene Wert des Widerstands einer Spule weist zum theoretischen Wert einen Offset auf, da der Innenwiderstand  $R_i$  nicht vernachlässigbar ist.

Dargestellt in dem Diagramm ist der ① gemessene Wert  $R_m$  aus dem Quotienten der Messwerte  $U$  und  $I$  (blau Quadrate); ② dem berechneten Wert  $R_b$  ausgehend von den Daten der Induktivität (orange) und ③ der berechnete Wert aus der Reihenschaltung  $R_R$  des ohm'schen Innenwiderstands  $R_i$  der Induktivität und der angegebenen Induktivität (gelb).

Der Wert des Innenwiderstands  $R_i$  wurde durch Anpassen des Wertes in der Tabellenkalkulation ermittelt.

### 3. Teil: RC-Glied als Hochpass

Um eine praktische Anwendung zu zeigen, bestimmen die Schülerinnen und Schüler im nächsten Schritt das frequenzabhängige Verhalten des RC-Hochpasses, der eine einfache Reihenschaltung aus einer Kapazität  $C$  und einem ohmschen Widerstand  $R$  ist.

Dieser Versuch lässt sich einfach mit Multimetern durchführen. Die beiden Multimeter messen einerseits die Gesamtspannung als Eingangsspannung  $U_e$  an der Reihenschaltung und andererseits die abfallende Spannung am ohmschen Widerstand als Ausgangsspannung  $U_a$ .

#### ♦ Widerstände im Wechselstromkreis

##### ♦ kapazitiver und induktiver Widerstand im Wechselstromkreis

Für eine sinusförmige Wechselspannung gilt:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$X_L = \omega \cdot L$$

mit:  $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Am Kondensator eilt der Strom der Spannung voraus.

An der Spule läuft der Strom der Spannung nach.

$X_C$ : kapazitiver Widerstand;  
 $\omega$ : Kreisfrequenz;  $C$ : Kapazität;  $X_L$ : induktiver Widerstand;  $L$ : Induktivität;  
 $\Delta\varphi$ : Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$

##### ♦ Reihenschaltung aus kapazitivem, induktivem und Ohm'schen Widerstand

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$Z$ : Impedanz (Scheinwiderstand);  
 $R$ : Ohm'scher Widerstand;  $X_L$ : induktiver Widerstand;  $X_C$ : kapazitiver Widerstand

**Abb. 12:** Auszug aus der Formelsammlung des IQB (Stand 14.02.2024)

Um das frequenzabhängige Verhältnis von Ausgangs- und Eingangsspannung darzustellen, verwendet man die gegebenen Formeln aus der Formelsammlung des IQB und erhält:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}}$$

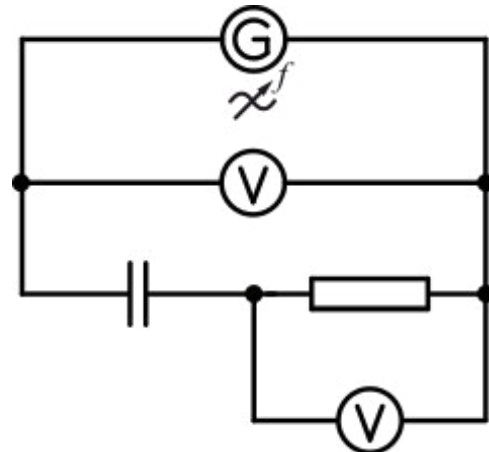
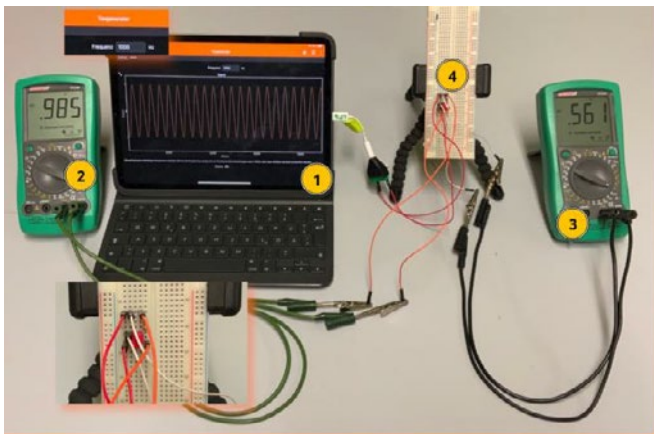
Für ein RC-Glied wird neben dem Ohm'schen lediglich ein kapazitiver Widerstand verwendet und somit vereinfacht sich die Formel zu:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_C}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

Die sogenannte Grenzfrequenz  $f_G$  als Kenngröße ist festgelegt auf den Wert  $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und es folgt damit:

$$2\pi f_G RC = 1 \rightarrow f_G = \frac{1}{2\pi RC}$$

## Aufbau

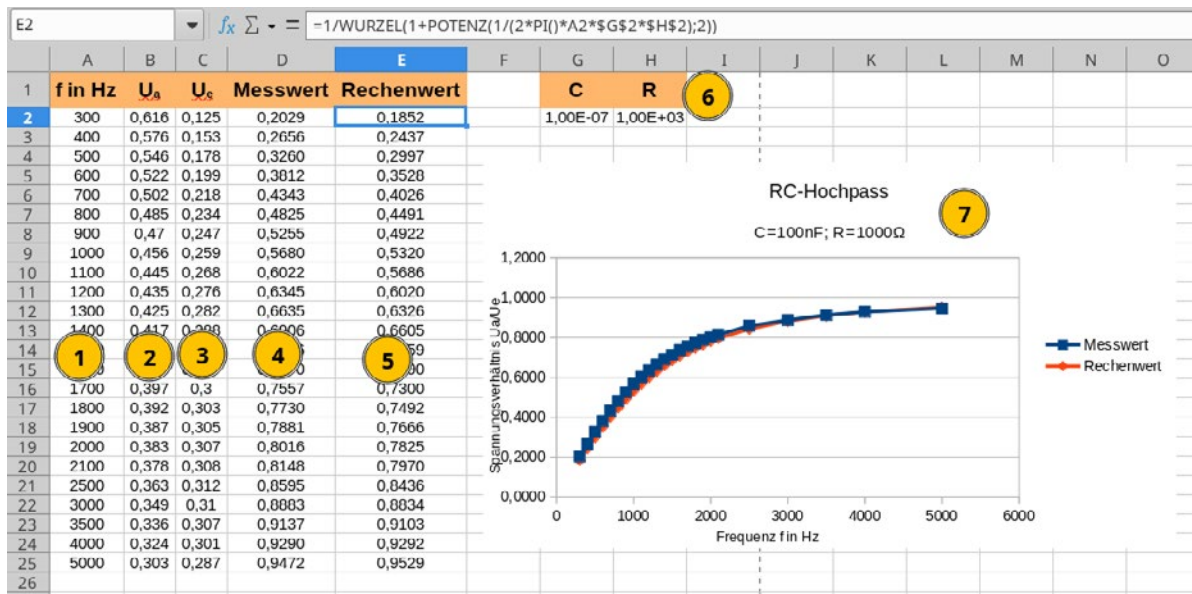


**Abb. 13:** Für die Messung des RC-Glieds als Hochpass benötigt man eine Reihenschaltung aus einer Kapazität  $C = 0,1 \mu F$  und Widerstand  $R = 470 \Omega$ . Auch hier reichen einfache Multimeter für die Messung.

① Signalgenerator über PhyPhox mit  $100 \text{ Hz} < f < 1000 \text{ Hz}$ ; ② Messung der Eingangsspannung  $U_e$ ; ③ Messung der Ausgangsspannung  $U_a$  am Widerstand  $R$ ; ④ Breadboard mit Aufbau

Dabei wird das Verhältnis der Ausgangsspannung  $U_a$  am Widerstand der Reihenschaltung zur Eingangsspannung  $U_e$  des Funktionsgenerators betrachtet. Auch hier kann man wieder das Smartphone/Tablet mit der App PhyPhox als Funktionsgenerator nutzen. Da die App auf den akustischen Bereich abgestimmt ist, sollten die Frequenzen, insbesondere die Grenzfrequenz  $f_G$  mit  $\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , im akustischen Bereich von  $200 \text{ Hz} < f_G < 3000 \text{ Hz}$  sein. Im vorliegenden Beispiel wurde eine Kapazität von  $C = 100 \text{ nF}$  und ein Ohm'scher Widerstand von  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  verwendet, sodass sich  $f_G = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-9} F \cdot 1,0 \cdot 10^3 \Omega} = 1,6 \text{ kHz}$  ergibt. Dank des Breadboards können die Schülerinnen und Schüler einfach weitere Kombinationen stecken und charakterisieren.

## Durchführung



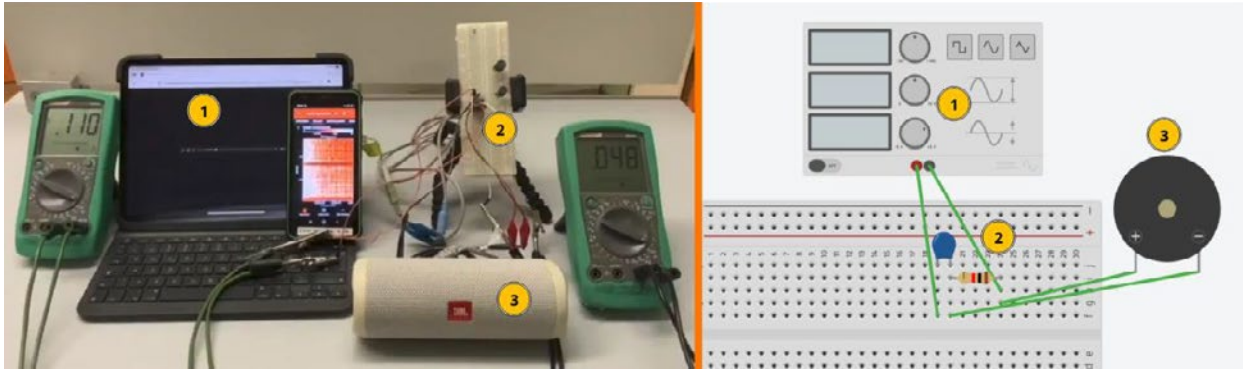
**Abb. 14:** Die Auswertung kann direkt über eine Tabellenkalkulation erfolgen. Der berechnete Wert wird mit dem theoretischen Wert verglichen.

① bis ③ Werte aus dem Versuch werden eingetragen; ④ Verhältnis von  $U_a/U_s$  bzw. als Formel „ $C2/B2$ “; ⑤ berechneter Wert ausgehend von der Frequenz und den Bauteilen „ $=1/WURZEL(1+(2*PI()*A2*G$2*H$2)^2)$ “; ⑥ Parameter der Bauteile des RC-Hochpasses; ⑦ Diagramm zum graphischen Vergleich der Messwerte mit der theoretischen Vorhersage

Mittels dem Tongenerator der App PhyPhox (ggf. auch per Fernzugriff) lässt sich nun die Frequenz der Eingangsspannung  $U_e(t)$  steuern und per Multimeter (im Modus AC~) die effektiven Werte der Amplituden messen. Auf das Messen des Effektivwerts der Eingangsspannung  $U_e$  könnte verzichtet werden, wenn dieser wie bei einem professionellen Funktionsgenerator konstant wäre.

Für die rechnerische und grafische Auswertung bietet sich die direkte Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms an. Die Auswertung mittels Tabellenkalkulation erleichtert die Arbeit und ermöglicht Dank der Grafiken eine einfache Diskussion der Ergebnisse.

Zur Motivation kann auch ein Aktivlautsprecher am Ausgang angeschlossen werden. Über die Tonausgabe können Messungen des akustischen Spektrums mit der App PhyPhox dargestellt werden. Zusätzlich kann die Kapazität bzw. der Widerstand auch im laufenden Betrieb durch Umstecken verändert werden, so dass eine Änderung der Parameter auch direkt hörbar ist.



**Abb. 15:** Die Funktion der Schaltung kann auch mit einem beliebigen Musikstück und einem Aktivlautsprecher erlebbar gemacht werden.

Teil 1



Teil 2



Teil 3



**Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden**

**Hier können Sie die Formelsammlung des IQB downloaden**



**Tabellenkalkulation**



## 2.8 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Interferenzversuche mit Licht

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	12 gA; eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"><li>• verschiedenfarbige LEDs, am besten auf Platine mit Batterie</li><li>• optisches Gitter, ab 600 Linien/mm mit Halter</li><li>• Maßband oder Lineal</li><li>• Lineare Skala (Lineal) auf Stativ</li><li>• ggf. ein Einfachspalt</li><li>• Smartphone</li></ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 12.3 gA Elektromagnetische Wellen

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen selbständig die Wellenlängen des von Leuchtdioden emittierten Lichts mit Hilfe eines Gitters. Dabei erläutern sie die Funktion der einzelnen Komponenten des Aufbaus, diskutieren Möglichkeiten der Minimierung von Messunsicherheiten und ermitteln den quantitativen Einfluss der Unsicherheiten auf das Ergebnis.

#### Ph 12.4 eA Elektromagnetische Wellen

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Wellenlängen verschiedenfarbigen, von Leuchtdioden emittierten Lichts mithilfe eines Gitters. Sie minimieren die Auswirkungen der Messunsicherheiten, indem sie den quantitativen Einfluss der Unsicherheiten der Eingangsgrößen auf das Ergebnis ermitteln. Sie erläutern die Funktion der einzelnen Komponenten des Aufbaus und kombinieren Größengleichungen zur Auswertung des Experiments. Zur Bestimmung von Strukturgrößen mittels Interferenz planen sie ein Experiment und vergleichen die ermittelten Abmessungen mit den bekannten Strukturgrößen.

### Ziel

Im Rahmen dieses Schülerexperiments werden Spektren verschiedenfarbiger LEDs mit Hilfe eines Beugungsgitters in der Durchsicht-Methode betrachtet und die zentralen Wellenlängen ermittelt. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) erläutern dabei die Bedeutung der am Versuchsaufbau beteiligten Komponenten.

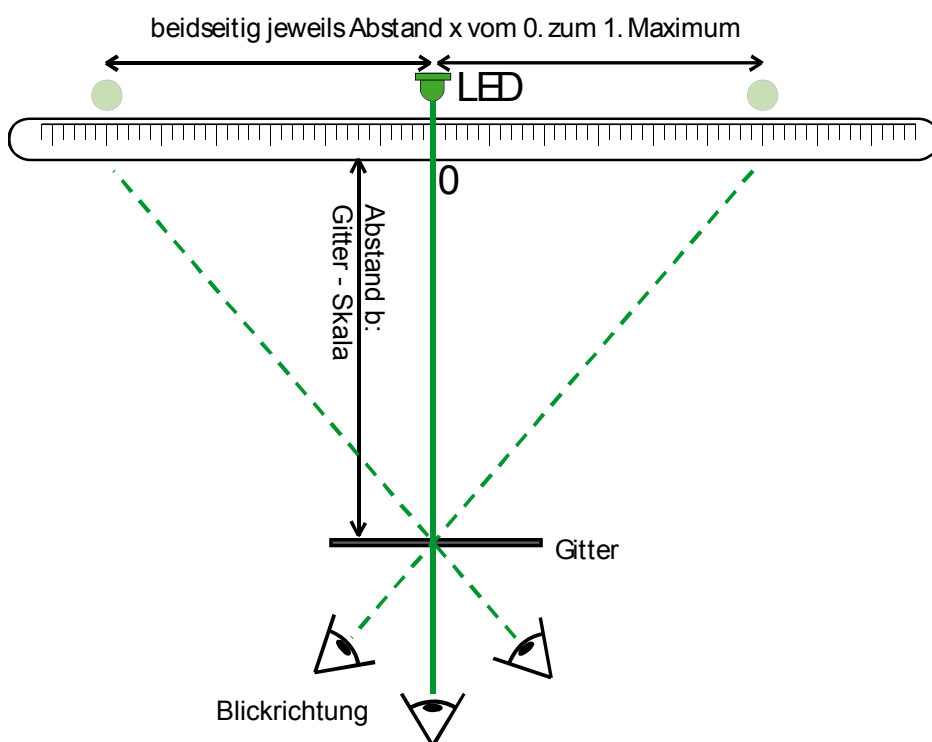
Der Umgang mit Messunsicherheiten ist ein zentraler Aspekt dieses Schülerexperiments. Dazu gehört die Bestimmung der Unsicherheiten bei der Messung der Größen sowie die rechnerische Behandlung deren Auswirkungen auf die daraus berechneten Zielgrößen. Dabei sollte jedoch nicht das unreflektierte Anwenden eines Kalküls im Vordergrund stehen.

Vielmehr sollen die SuS ein Vorgehen entwickeln, um diese Messunsicherheiten möglichst zu minimieren.

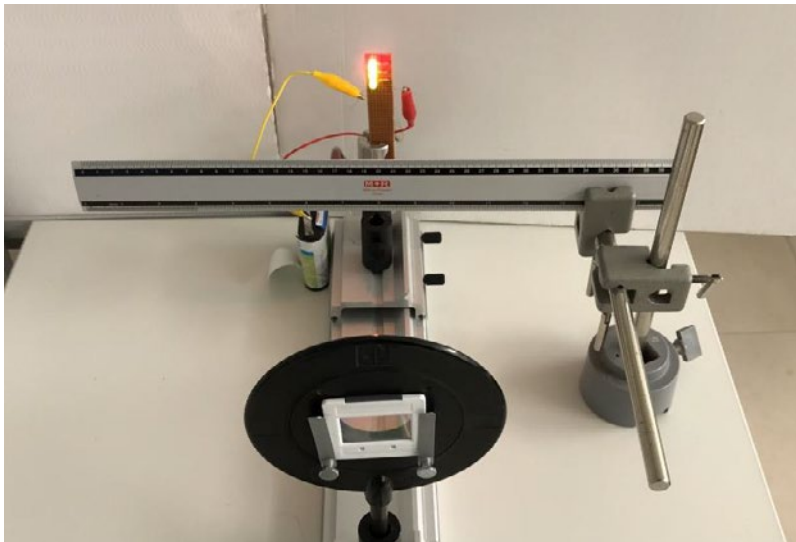
Im erhöhten Anforderungsniveau wird ergänzend ein Experiment zu Bestimmung von Strukturgrößen aufgebaut und durchgeführt. Als mögliches Objekt eignet sich eine Vogelfeder. Für sie wird hier beispielhaft das Vorgehen erläutert. Auch der Rillenabstand einer CD oder die Dicke eines Haares lassen sich gut untersuchen. Bei der CD besteht sogar die Möglichkeit, die gespeicherte Datenmenge abzuschätzen.

## Aufbau des Experimentes zur Bestimmung der LED-Wellenlänge

Abbildung 1 zeigt den Aufbau des Experimentes schematisch, Abbildung 2 im Foto. Das verwendete Gitter und der Aufbau für die Leuchtdiodenhalterung ist in Abbildung 3 dargestellt.

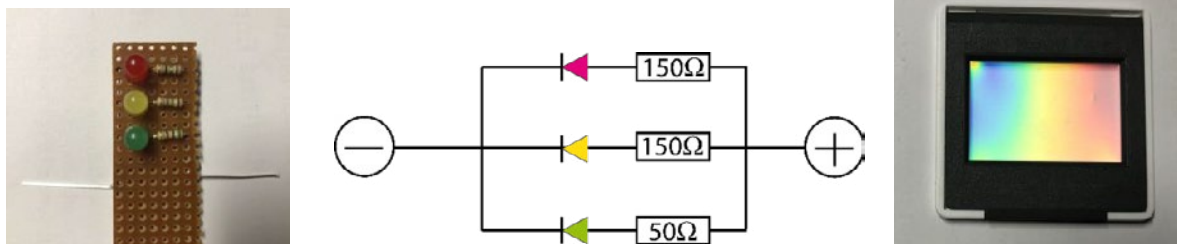


**Abb. 1:** Schematischer Versuchsaufbau



**Abb. 2:** Verwendeter Aufbau

Die drei LEDs werden mit je einem Schutzwiderstand (Rot und Gelb: ca.  $150\ \Omega$ ; Grün: ca.  $50\ \Omega$ ) in Reihe jeweils parallel an 5 V angeschlossen. Eine 4,5 V-Batterie als Elektrizitätsquelle ist ebenfalls gut geeignet. Als Gitter wird der Zuschnitt einer Spektralfolie (z. B. Astromedia; 1000 Striche/mm; 4 cm mal 4 cm) im Diarahmen verwendet.



**Abb. 3:** Verwendeter LED-Block mit Schaltskizze und das Gitter

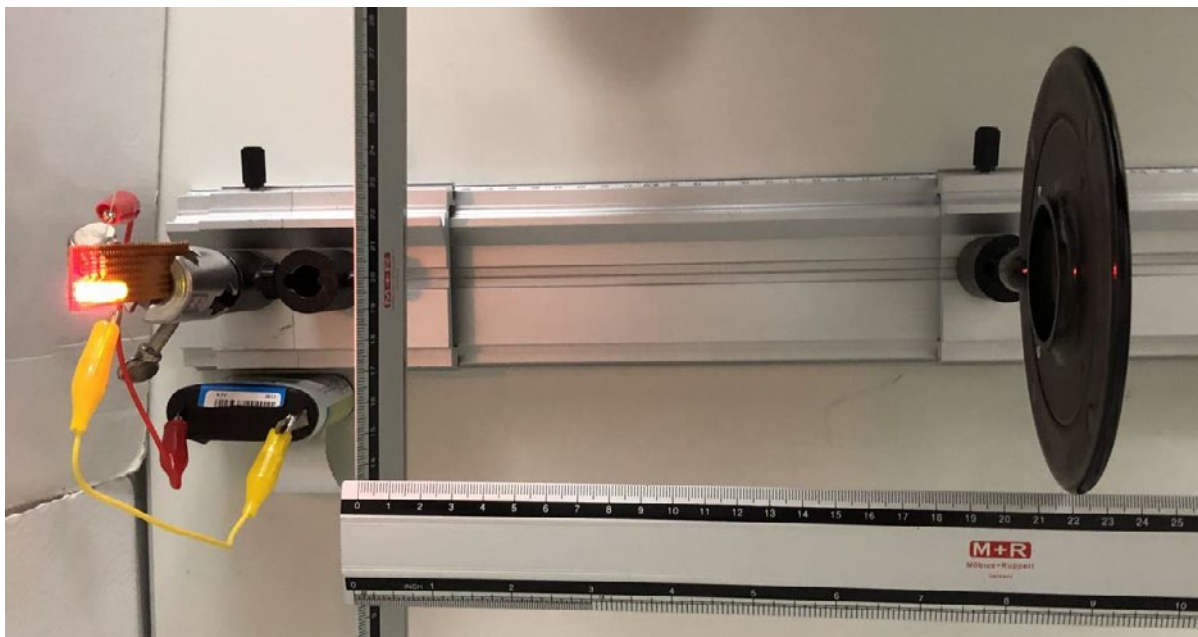
Leuchtdioden, Messskala und Gitter werden so aufgebaut, dass die SuS durch das Gitter in Richtung Leuchtdiode blicken können. Bei leicht schrägem Blick auf das Gitter sehen sie neben der LED auch das Beugungsbild 1. Ordnung, ggf. auf beiden Seiten (siehe Abb. 5). Die Skala für die Messung des horizontalen Abstandes in x-Richtung muss dabei entsprechend positioniert werden. Am besten wird sie unterhalb und kurz vor den LEDs aufgebaut, so dass das Bild des 1. Maximums knapp über der Skala liegt. Zudem muss darauf geachtet werden, dass die Skala möglichst senkrecht zur optischen Achse ausgerichtet ist, da dies die Grundlage der Winkelbestimmung über den Tangens ist (s. u.).

Auch der Abstand zwischen Gitter und Skala muss im Hinblick auf gute Ablesbarkeit und möglichst kleinen Messfehler gewählt werden. Je größer der Abstand ist, desto kleiner ist zunächst die relative Unsicherheit des Abstandes  $b$ , wenn dieser auf 1 mm genau gemessen wird. Die Ablesegenauigkeit des Abstandes  $x$  zwischen 0. und 1. Maximum nimmt hingegen mit größerem Abstand  $b$  ab, denn je weiter die Skala vom Gitter entfernt ist, desto schlechter lässt sich die Skala in der Durchsicht ablesen. Zudem liegen bei einem großen Abstand und bei einem hochauflösenden Gitter die Maxima schnell außerhalb der Skala des hier verwendeten Lineals. Sinnvoll erscheint es hier, die Abstände so zu wählen, dass die millimetergenaue Skala für den Abstand  $x$  gerade noch gut abgelesen oder fotografiert (s. u.)

werden kann. Diese Erkenntnis sollte im Rahmen der Diskussion über Messungenauigkeiten von den SuS selbst gefunden werden.

## Messung und Umgang mit Messunsicherheiten

Zu Beginn wird der Abstand  $b$  bestimmt. Hier erfolgt dies mit einem Lineal, dass möglichst gut an die Position des Gitters und die Position der Skala gehalten wird. Abbildung 4 zeigt den Sachverhalt in der Draufsicht. Hier wurde  $b = (220 \pm 3)$  mm bestimmt, wobei für das Ablesen an der Skala  $\pm 1$  mm und für das Ablesen am Gitter auf Grund der Einbausituation  $\pm 2$  mm Unsicherheit angenommen wurden.



**Abb. 4:** Bestimmung des Abstandes  $b$  zwischen Gitter und Skala

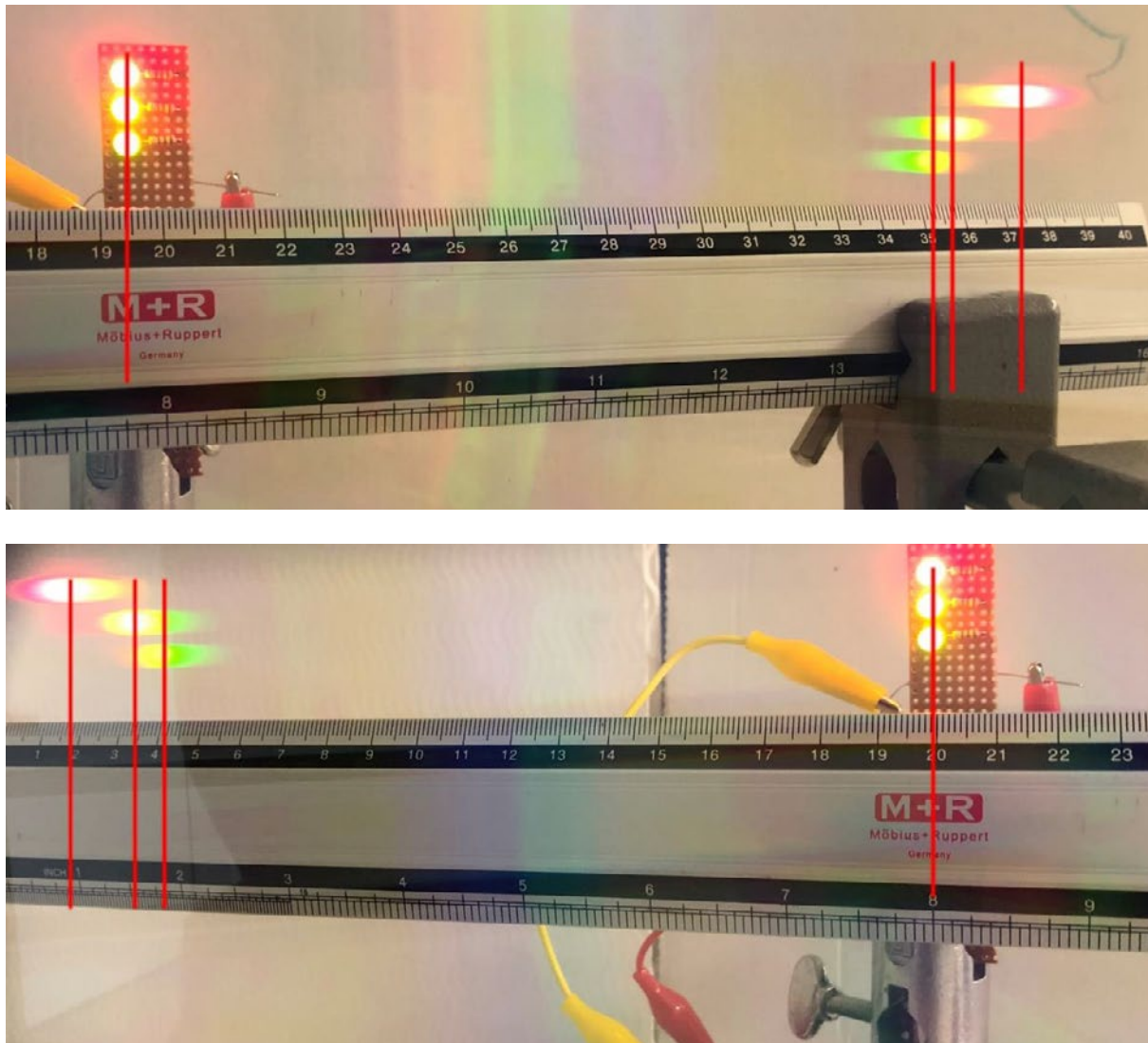
Der Abstand  $x$  zwischen 0. und 1. Maximum kann nun auf beiden Seiten als Differenz der Ablesewerte auf der Skala abgelesen werden. Eine gute Ausrichtung von LED und Skala ist dabei ein entscheidender Aspekt der Messgenauigkeit. Außerdem ist es wichtig, beim Ablesen der Messwerte das Auge, bzw. den Kopf, möglichst wenig zu bewegen, um eine möglichst kleine Parallaxe zu gewährleisten. Eine Differenz der Werte für  $x$  des linken und rechten Maximums (s. u.) ist ein Hinweis auf eine unzureichende Genauigkeit der Ausrichtung.

Statt mit dem Auge zu beobachten, bietet sich hier die Möglichkeit, den „Blick“ mit einem Smartphone zu fotografieren. So gelingt es, die Position des 0. und des 1. Maximums parallaxefrei „mit einem Blick“ zu erfassen. Das Problem der Parallaxe zeigt sich für den Wert des 0. Maximums im Vergleich des rechten und linken Fotos (siehe Abb. 5), da hier der Blickwinkel der Kamera zwischen linker und rechter Seite leicht variiert wird. Dadurch werden verschiedene Messwerte für das 0. Maximum erzielt. Bei einem Gitter mit geringerer Auflösung und beim Verwenden einer Weitwinkelkamera ist auch das Halbieren des Gesamtabstandes der beiden ersten Maxima zur Bestimmung von  $x$  denkbar.

Schwierig bleiben die Ausdehnung und damit die Unschärfe der LED sowie die spektrale Breite des 1. Maximums, die weit über der Skalenauflösung von 1 mm liegen. Der Umgang mit dieser

Unsicherheit ist der entscheidende Aspekt des Experimentes zur Abschätzung und Eingrenzung der Messunsicherheiten.

Die Größe der LED als Lichtquelle kann – wie in der Spektroskopie üblich - durch einen Spalt eingegrenzt werden. Dieser reduziert die Breite auf Kosten der Lichtausbeute, erfordert aber auch mehr Geschick beim Ausrichten der Komponenten. Seine Notwendigkeit kann von guten Schülern selbst erkannt werden, bringt in diesem Experiment aber nur wenig Vorteile, da die spektrale Breite des 1. Maximums bestehen bleibt, welche die Messunsicherheit dominiert. Daher wurde hier auf den Spalt verzichtet.



**Abb. 5:** Fotos der Messung: **oben:** rechte Interferenzmaxima **unten:** linke Interferenzmaxima  
Beim Ablesen des Wertes für die Position der LED wird die Parallaxe erkennbar, Skala und LED wurden zwischen beiden Fotos nicht bewegt, der Perspektivwechsel führt zum Ablesen verschiedener Werte beim 0. Maximum.

Die wahrgenommene spektrale Breite variiert mit der eingestellten Helligkeit der LEDs und ggf. der Größe des Spaltes. Beim Durchführen der Messung wird klar, dass die millimetergenaue Skala hier nur bedingt die Messunsicherheit vorgibt. Die Schüler benötigen ein Vorgehen, um das spektrale Maximum der LED abzuschätzen. Dies kann eine visuelle Mittelung oder eine Mittelwertbildung des rechten und linken spektralen Randes sein. Beides ist mit bloßem Auge eher schwierig. Zudem ist die Wahrnehmung von Farben durchaus von der beobachtenden

Person abhängig. Daher erscheint es ratsam, den Blick wie erwähnt mit dem Smartphone zu fotografieren und die mittlere Wellenlänge im Foto von verschiedenen Personen ablesen zu lassen. Dieses Vorgehen liefert so einen guten Anhaltspunkt für Messunsicherheiten dieser Größe, ggf. kann der Mittelwert der Messung von verschiedenen Personen in Betracht gezogen werden.

## Auswertung

Für alle LEDs wurde das spektrale Maximum abgeschätzt (siehe Abb. 5) und eingezeichnet. Selbst die leicht schräge Skala am Lineal erschwert ein genaues Ablesen. Wird dies von mehreren SuS durchgeführt, wird schnell deutlich, dass die Messwerte durchaus um einige Millimeter schwanken. Für die rote und die gelbe LED wurde als Bestwert die Mitte des weißen überbelichteten Teils angenommen, für die Grüne LED wurde die Mitte des Spektrums abgeschätzt. Die Ablesepositionen sind in Abbildung 5 jeweils als roter Strich eingetragen. Die Ablesegenauigkeit wurde hier jeweils mit  $\pm 3$  mm angenommen. In der Differenz zur Berechnung von  $x$  werden die absoluten Fehler beider Messwerte aufaddiert. Tabelle 1 stellt die Messwerte mit Unsicherheiten zusammen.

Linke Seite:	Rechte Seite:
0. Maximum bei $(199 \pm 1)$ mm	0. Maximum bei $(194 \pm 1)$ mm
Lage des 1. Maximums:	Lage des 1. Maximums:
rot: $(17 \pm 3)$ mm $\rightarrow x = (182 \pm 4)$ mm	rot: $(375 \pm 3)$ mm $\rightarrow x = (181 \pm 4)$ mm
gelb: $(34 \pm 3)$ mm $\rightarrow x = (165 \pm 4)$ mm	gelb: $(357 \pm 3)$ mm $\rightarrow x = (163 \pm 4)$ mm
grün: $(41 \pm 3)$ mm $\rightarrow x = (158 \pm 4)$ mm	grün: $(352 \pm 3)$ mm $\rightarrow x = (158 \pm 4)$ mm
<b>Tab. 1:</b> Bestimmung der Messwerte für $x$ mit entsprechenden Unsicherheiten	

Nun erfolgt für jede LED die Berechnung der Wellenlänge über den Beugungswinkel als Zwischenwert (siehe Tab. 2). Dabei liegt in diesem Experiment ein besonderer Fokus auf der Berechnung der Messunsicherheiten (früher Fehlerfortpflanzung genannt, siehe Dokument zum Umgang mit Messunsicherheit im LIS). Als Messwert wird der Mittelwert beider Seiten verwendet. Eine Mittelung könnte auch die Unsicherheit der Messwerte von  $x$  um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  verbessern<sup>1</sup>. Dies geht aber über die grundlegende Betrachtung der Messunsicherheiten hinaus und bleibt daher unbeachtet. Gemäß den vereinfachten Regeln im LIS-Dokument bleibt die Messunsicherheit bei Mittelwertbildung gleich.

Die Berechnung der Unsicherheiten bei trigonometrischen Funktionen würde ebenfalls angemessene Anforderungen übersteigen. Daher wird hier das Verfahren der größten und kleinsten Werte angewendet. Bei der Quotientenbildung im Argument der Tangensfunktion liefert ein großer Zähler und ein kleiner Nenner einen besonders großen Wert und umgekehrt. Daher wird der größte und der kleinste Winkel mit den entsprechenden Werten am Rande des Unsicherheitsintervalls von  $x$  und  $b$  bestimmt und hieraus jeweils der minimale und maximale Wert für  $\sin(\alpha)$  zur Bestimmung der minimalen und maximalen Wellenlänge berechnet.

<sup>1</sup> Bei Mittelwertbildung über  $n$  unsicherheitsbehaftete Größen gilt näherungsweise:  $\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Für die Berechnung der Wellenlänge wird die Gitterkonstante benötigt. Die Herstellerangabe lautet 1000 Linien/mm, was einem Gitterabstand  $d = 1,0 \mu\text{m}$  entspricht. Da die Genauigkeit dieses Wertes unbekannt ist, bleibt sie hier unberücksichtigt, da angenommen werden kann, dass sie deutlich unter den anderen Unsicherheiten des Experimentes liegt.

LED-Farbe	Rote LED	Gelbe LED	Grüne LED
Abstand x	$(182 \pm 4) \text{ mm}$	$(164 \pm 4) \text{ mm}$	$(158 \pm 4) \text{ mm}$
Abstand b	$(220 \pm 3) \text{ mm}$	$(220 \pm 3) \text{ mm}$	$(220 \pm 3) \text{ mm}$
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)$	$\alpha_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{178 \text{ mm}}{223 \text{ mm}}\right) = 38,5^\circ$ $\alpha_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{186 \text{ mm}}{217 \text{ mm}}\right) = 40,6^\circ$ $\alpha = 39,6^\circ \pm 1,1^\circ$	$\alpha_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{160 \text{ mm}}{223 \text{ mm}}\right) = 35,7^\circ$ $\alpha_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{168 \text{ mm}}{217 \text{ mm}}\right) = 37,7^\circ$ $\alpha = 36,6^\circ \pm 1,0^\circ$	$\alpha_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{154 \text{ mm}}{223 \text{ mm}}\right) = 34,6^\circ$ $\alpha_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{162 \text{ mm}}{217 \text{ mm}}\right) = 36,7^\circ$ $\alpha = 35,7^\circ \pm 1,1^\circ$
$\lambda = d \cdot \sin \alpha$ mit $d = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$\lambda_{\min} = d \cdot \sin(38,5^\circ) = 622 \text{ nm}$ $\lambda_{\max} = d \cdot \sin(40,6^\circ) = 651 \text{ nm}$	$\lambda_{\min} = d \cdot \sin(35,7^\circ) = 584 \text{ nm}$ $\lambda_{\max} = d \cdot \sin(37,7^\circ) = 612 \text{ nm}$	$\lambda_{\min} = d \cdot \sin(34,6^\circ) = 568 \text{ nm}$ $\lambda_{\max} = d \cdot \sin(36,7^\circ) = 598 \text{ nm}$
Mittelwertbildung	$\lambda = (637 \pm 15) \text{ nm}$	$\lambda = (598 \pm 14) \text{ nm}$	$\lambda = (583 \pm 15) \text{ nm}$
Spektraler Vergleichswert (s. Anhang)	631 nm	591 nm	576 nm

**Tab. 2:** Bestimmung der Wellenlängen mit entsprechenden Unsicherheiten

Alternativ kann auch die Fortpflanzung der Messunsicherheiten bei der Quotientenbildung betrachtet werden, dessen Unsicherheit als Summe der relativen Unsicherheiten bestimmt wird.

Bei der roten LED ergibt sich für den die Summe der relativen Unsicherheiten der Längen zu:

$$\frac{4 \text{ mm}}{182 \text{ mm}} + \frac{3 \text{ mm}}{220 \text{ mm}} = 3,56\%$$

Damit ergibt sich für den Quotienten  $\frac{182 \text{ mm}}{220 \text{ mm}}$  ein Wert von  $0,827 \pm 0,029$ .

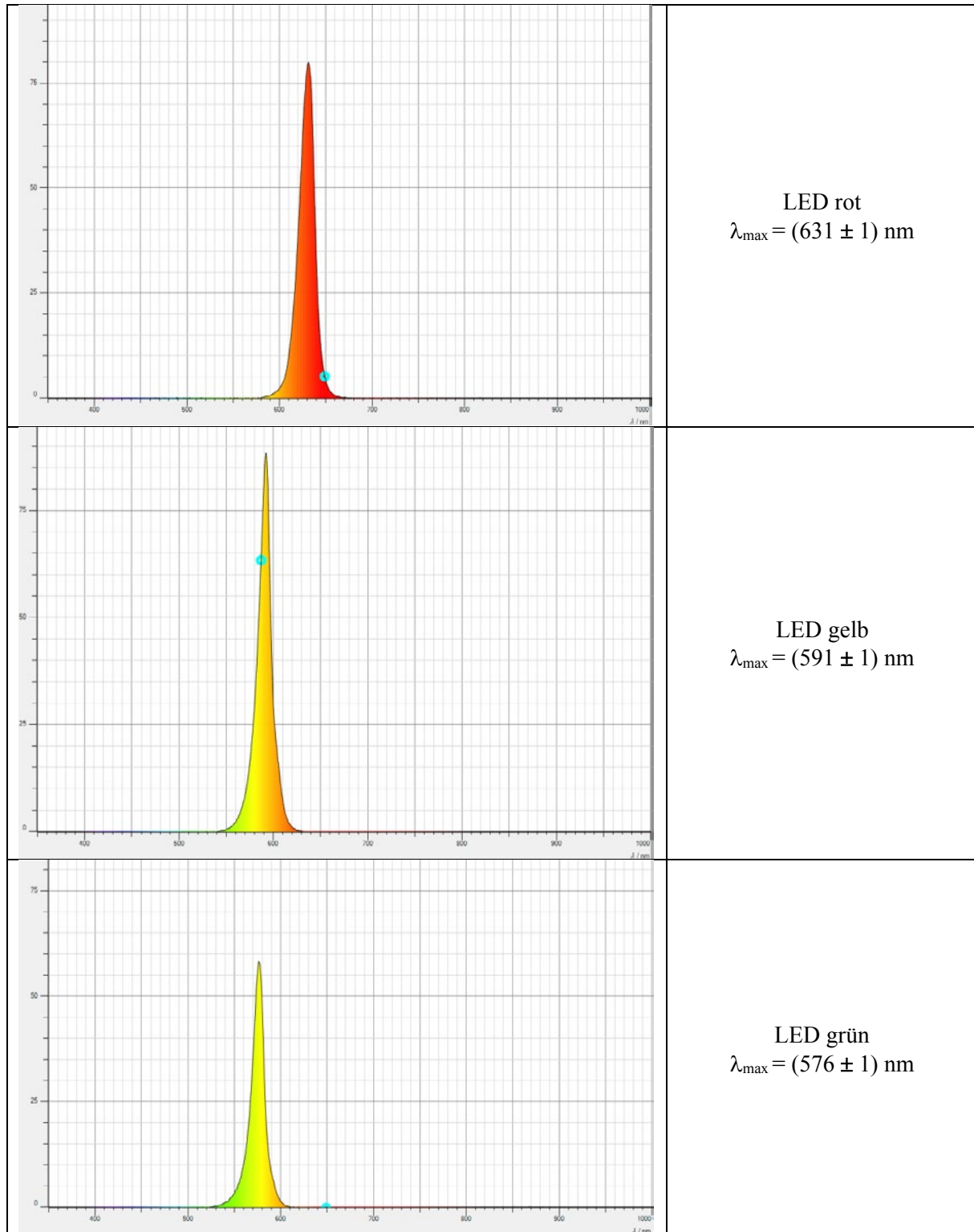
Für den minimalen und den maximalen Winkel folgt damit:

$$\alpha_{\min} = \tan^{-1}(0,827 - 0,029) = 38,6^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_{\max} = \tan^{-1}(0,827 + 0,029) = 40,6^\circ$$

Die Berechnung der Unsicherheit führt hier erwartungsgemäß zum annähernd selben Unsicherheitsintervall wie das entsprechende Einsetzen der größten und kleinsten Werte in den Quotienten. Die Verfahren können hier also als gleichwertig betrachtet werden.

## Anhang

Referenzspektren der verwendeten LED (vermessen mit LD CASSY Kompaktspektrometer;  
Intensität in Prozent der maximal messbaren Intensität):



## Aufbau des Experiments zur Bestimmung der Strukturgrößen einer Vogelfeder

Benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"><li>• Laser</li><li>• Zwei Beugungsgitter mit unterschiedlicher Gitterkonstante (z.B. 80 Linien/mm und 300 Linien/mm)</li><li>• Vogelfeder (Deckfeder einer Taube) an Stativ</li><li>• Maßband (5 m) und Lineal mit mm-Skala</li><li>• Schirm oder weiße Wand</li><li>• gut abgedunkelter Raum</li></ul>
---------------------	--

Im zweiten Experiment sollen die SuS Strukturgrößen eines kleinen Objektes in der Größe der Wellenlänge mit einem Interferenzexperiment bestimmen. Dabei geht es vor allem um eine Abschätzung der Größen.

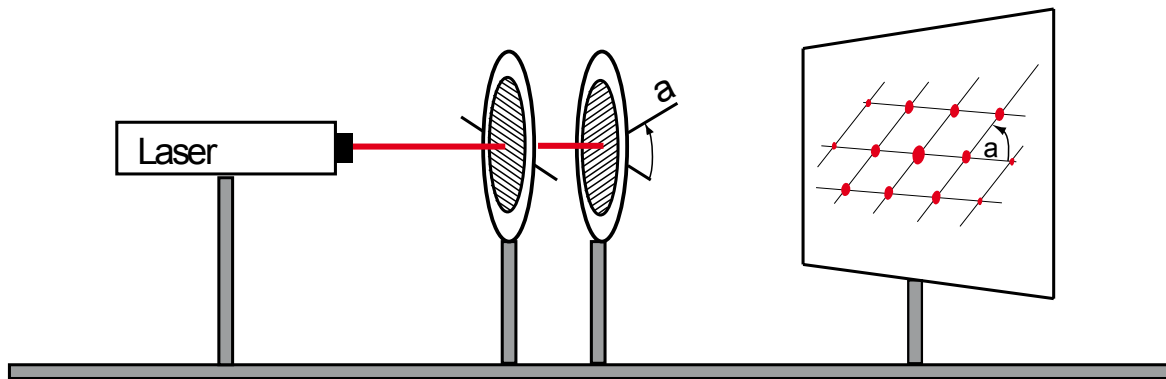
Bereits gut dokumentiert sind die Abschätzung der Dicke eines Haares aus dem Beugungsbild eines Lasers, dass sich als Umkehrexperiment eines Einzelspalttes ergibt (Babinet'sches Prinzip) oder die Größenbestimmung der Speicherstruktur auf einer Compact oder Blu-ray Disc.

### Ziel

Mit der Beugung von Laserlicht wird die periodische Struktur einer Vogelfeder untersucht. Dafür werden zunächst die Abstände und Winkel im Beugungsbild untersucht und vermessen. Im Vergleich mit mikroskopischen Bildern und schematischen Zeichnungen einer Feder können die Beugungsstrukturen den regelmäßig angeordneten Bestandteilen der Vogelfeder zugeordnet werden. Je nach Möglichkeit können die mikroskopischen Bilder auch selbst erstellt und die realen Größenstrukturen der Feder unter dem Mikroskop ausgemessen werden. Ein Vorversuch mit dem Beugungsbild von zwei gekreuzten Strichgittern führt in das Verständnis zweidimensionaler Beugungsstrukturen ein.

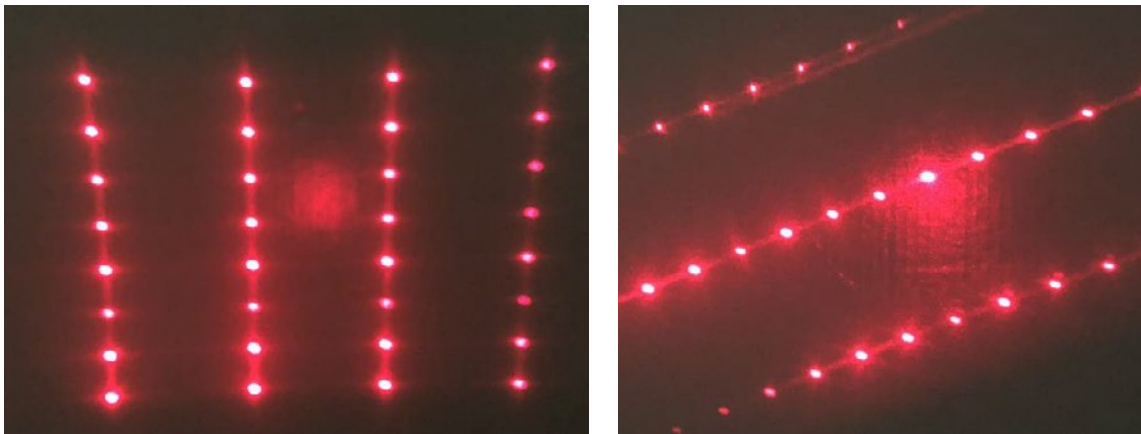
### Vorversuch – Das Beugungsbild von zwei gekreuzten Strichgittern

In den Strahlengang eines Lasers werden zwei Gitter mit unterschiedlicher Gitterkonstante gestellt (siehe Abb.6). Die Gitterkonstanten sollten dabei vergleichbar sein, so dass der Abstand der Beugungsmaxima auf dem Schirm einigen Zentimetern entspricht. Gitter im Bereich von 100 bis 300 Striche pro Millimeter eignen sich gut. Das zweite Gitter lässt sich dabei gegenüber dem ersten um den Winkel  $\alpha$  verdrehen, dies kann auch frei Hand geschehen. Die Gitter sollten relativ zum Schirmabstand nahe beieinanderstehen.



**Abb. 6:** schematischer Aufbau des Vorversuches

Von der Beugung am Liniengitter kennen die Schülerinnen und Schüler bisher nur die periodische Anordnung der Maxima in einer Dimension, aus der sich die Gitterkonstante berechnen lässt. Diese lineare Struktur ist dabei in der Richtung der periodischen Struktur des Gitters ausgerichtet – senkrecht zu den Gitterlinien. Das Beugungsbild der beiden Gitter ist zweidimensional und deutlich komplexer. Statt der bekannten Anordnung der äquidistanten Beugungsmaxima in einer Reihe ist jetzt ein parallelogrammförmiges Gittermuster von Punkten zu erkennen (siehe Abb. 7).



**Abb. 7:** Beugungsbilder bei zwei verschiedenen Verdrehungswinkeln ( $90^\circ$  und  $60^\circ$ ). Die Gitterkonstanten betragen  $300/\text{mm}$  und  $80/\text{mm}$

Ein Innenwinkel eines Parallelogramms entspricht dabei immer dem Winkel  $\alpha$  zwischen den Gittern. Wird jeweils nur ein Gitter entfernt, so erkennt man, dass das gesamte Beugungsbild versetzte Interferenzmaxima der Punktstruktur eines einzelnen Gitters sind. Die beiden Seitenlängen  $x_i$  der Parallelogramme entsprechen dabei indirekt proportional den jeweiligen Gitterkonstanten  $d_i$  gemäß  $\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{l}$ .

Dabei ist  $d_i$  die Gitterkonstante,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $l$  der Abstand zwischen Gitter und Schirm. So kann die kurze Parallelogrammseite als Beugungsstruktur des Gitters mit dem entsprechend großen Gitterabstand in passender Richtung interpretiert werden. Die Gitterstruktur des Interferenzbildes enthält so die Informationen über beide Beugungsgitter sowie deren Orientierung zueinander. Der Vorversuch soll aber nur das Phänomen bei Verdrehung der Beugungsstrukturen zueinander verdeutlichen und noch nicht quantitativ ausgewertet werden.

## Das Beugungsbild einer Vogelfeder - Aufbau

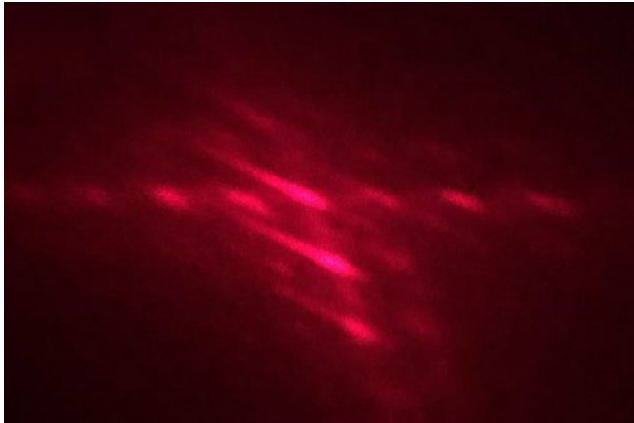
Eine geeignete Vogelfeder – in diesem Fall die Deckfeder einer Taube – ersetzt nun die gekreuzten Gitter und wird mit einem Laser bestrahlt. Der Strahl wird von der Struktur der Vogelfeder gebeugt, das Beugungsbild wird auf einem Schirm abgebildet (siehe Abb. 8). Der Abstand des Schirmes sollte dabei zwischen 30 cm und 3 m variabel sein, um die verschiedenen Größenordnungen der Beugungsstruktur (s. u.) gut vermessen zu können. Der Versuch sollte in einem gut abgedunkelten Raum durchgeführt werden.



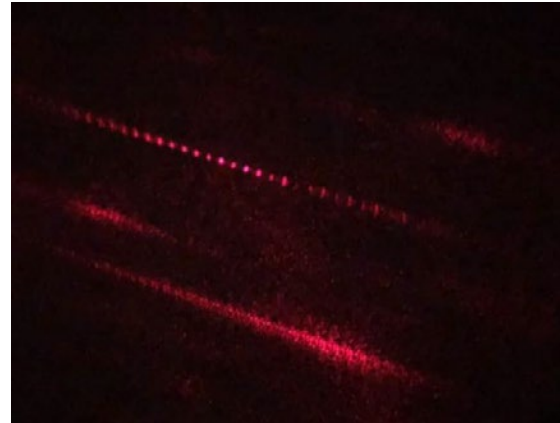
**Abb. 8:** Versuchsaufbau zur Strukturuntersuchung einer Vogelfeder.

## Auswertung

Abbildung 9 zeigt das Beugungsbild der Feder in zwei Aufnahmen. Für Abbildung 9a stand der Schirm mit 27 cm recht nahe an der Feder. Die Maxima sind diagonal verschmiert und es kann ein zweidimensionales parallelogrammförmiges Gittermuster erkannt werden. Für Abbildung 9b wurde der Schirm mit 270 cm deutlich weiter von der Feder entfernt aufgestellt. Fast alle Maxima verblassen. Dafür wird erkennbar, dass das diagonal verschmierte Maximum in der Mitte selbst wieder eine Anordnung von Maxima mit regelmäßigen Abständen ist. Aus dem Zusammenhang von Gitterkonstante und Abstand der Maxima wird klar, dass dieser der kleineren Beugungsstruktur ein größerer Gitterabstand in der Struktur der Feder zugeordnet werden muss.



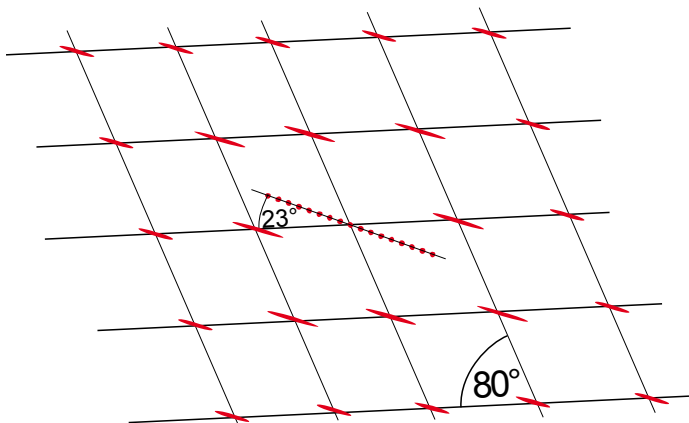
**Abb. 9a:** Beugungsmuster der Feder bei geringerem Abstand (27 cm) zwischen Feder und Schirm. Die Maxima erscheinen diagonal verzerrt.



**Abb. 9b:** Beugungsmuster der Feder bei größerem Abstand (270 cm) zwischen Feder und Schirm. Zumindest das diagonal verzerrte Hauptmaximum in der Mitte wird in Einzelpunkte aufgelöst

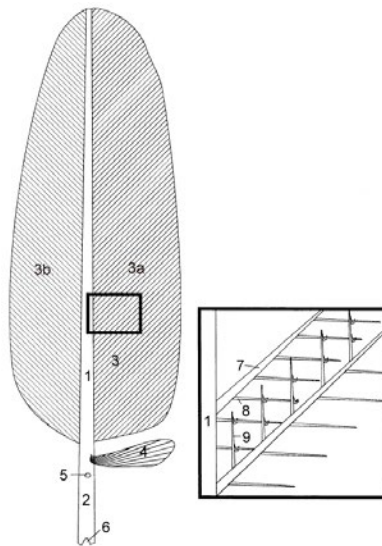
Abbildung 10 zeigt das Beugungsbild der Feder nochmals schematisch. Es besteht wie erwähnt aus einem parallelogrammförmigen Gittermuster mit einem Winkel von  $80^\circ$ . Die zugrundeliegende Gitterstruktur der Feder muss somit ein ebenfalls um  $80^\circ$  verdrehtes Kreuzgitter sein und ähnliche Abstände aufweisen.

Die kleinere Beugungsstruktur des diagonal verzerrten Maximums in der Mitte muss von einer deutlich größeren periodischen Struktur der Feder stammen, die dann nochmals um  $23^\circ$  verdreht ist.



**Abb. 10:** Schematische Darstellung der Beugungsstruktur

Um die Beugungsstrukturen den Bestandteilen der Feder zuzuordnen, wird der schematische Aufbau einer Vogelfeder betrachtet (siehe Abb. 11). Die regelmäßige feine Struktur der Fahne besteht aus den sogenannten Federästen, die jeweils wieder die Bogen- und die Hakenstrahlen tragen. Bogen- und Hakenstrahlen verhaken sich ineinander und bilden so das geschlossene Geflecht der Federfahne, das wie ein Klettverschluss aufgerissen und wieder zusammengefügt werden kann.

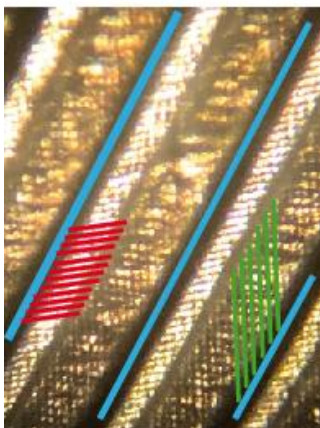


**Abb. 11:** Schematischer Aufbau einer Vogelfeder: 1 Schaft, 2 Spule, 3 Fahne (3b Außen-, 3a Innenfahne), 4 Nebenfeder, 5 oberer Nabel, 6 unterer Nabel, 7 Federast, 8 Bogenstrahl, 9 Hakenstrahl

Quelle: Wikipedia.org<sup>2</sup>

Geometrisch kann die Parallelogrammstruktur dem Geflecht aus Haken- und Bogenstahlen zugeordnet werden. Die beiden Strahlenarten bilden jeweils ein Strichgitter, welche im  $80^\circ$ -Winkel zueinanderstehen.

Das feinere Beugungsmuster des zentralen Maximums kann dem Strichgitter der langen Federäste zugeordnet werden. Dieses ist um  $23^\circ$  gegenüber dem größeren Beugungsmuster verdreht, wie auch die Federäste zu den Hakenstahlen verdreht sind. Abbildung 12 zeigt dies im Mikroskopbild der in diesem Versuch verwendeten Taubendeckfeder. Die Ausrichtung der Federäste, im Bild blau hervorgehoben, entspricht ungefähr der  $23^\circ$ -Verdrehung zur den grün hervorgehobenen Hakenstrahlen. Zudem ist zu erkennen, dass Haken- und Bogenstrahlen im Winkel von ca.  $80^\circ$  zueinander liegen.



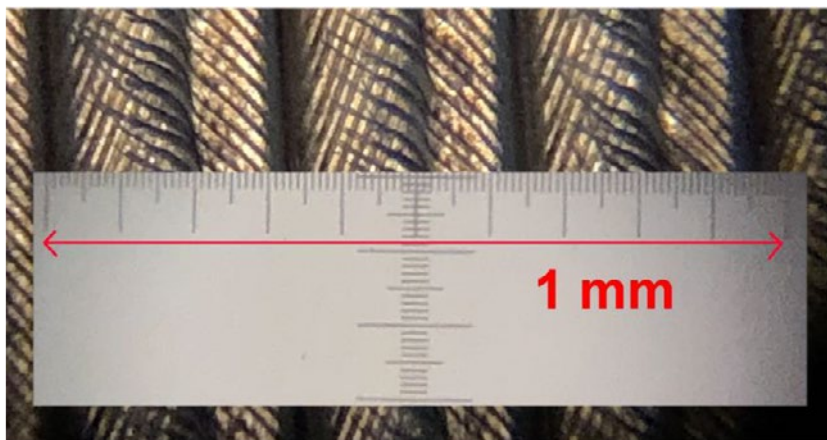
**Abb. 12:** Mikroskopische Aufnahme der verwendeten Vogelfeder. Die Federäste sind blau, die Bogenstahlen rot und die Hakenstrahlen grün hervorgehoben.

<sup>2</sup> <https://de.wikipedia.org/wiki/Feder>, abgerufen am 13.01.2024

Zur Vermessung der Strukturen werden die Abstände  $x$  der Maxima und die jeweilige Entfernung  $b$  zwischen Schirm und Feder bestimmt. Es ergibt sich:

Federäste	Federstrahlen
$x = (5 \pm 0,5) \text{ mm}$ $b = (2,70 \pm 0,01) \text{ m}$ $d = \frac{\lambda b}{x} = (351 \pm 35) \mu\text{m}$	$x = (10 \pm 1) \text{ mm}$ $b = (270 \pm 2) \text{ mm}$ $d = \frac{\lambda b}{x} = (18 \pm 2) \mu\text{m}$

Unter dem Mikroskop (siehe Abb. 13) konnte der Abstand der Federäste zu  $(330 \pm 10) \mu\text{m}$  und der Abstand der Strahlen zu  $(20 \pm 5) \mu\text{m}$  bestimmt werden. Die Größenordnungen der durch Interferenz bestimmten Größen können somit durch die Mikroskopmessung gut bestätigt werden.



**Abb. 13:** Die Feder und eine 10- $\mu\text{m}$ -Eichskala wurden nacheinander im Mikroskop fotografiert und übereinandergelegt. Der Abstand der Federäste kann zu  $(330 \pm 10) \mu\text{m}$ , der der Strahlen zu  $(20 \pm 5) \mu\text{m}$  bestimmt werden.

Die Abstände der Äste und Strahlen variieren an verschiedenen Stellen der Feder. Daher sollte beim Vergleich von Beugung und Mikroskopie darauf geachtet werden, dass möglichst dieselbe Stelle vermessen wird.

Teil 1



Teil 2



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

## 2.9 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Polarisation von Licht

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	13 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
benötigtes Material	<p>Freies Experimentieren</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Polarisationsfilter</li> <li>• Geeignete Alltagsgegenstände (LCD-Display, Geodreieck, Sonnenbrille, Glasscheibe, doppelbrechender Kristall)</li> </ul> <p>Messexperiment zum Gesetz von Malus</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• COB-Taschenlampe</li> <li>• Bis zu drei Polarisationsfilter</li> <li>• Stativmaterial (optische Bank)</li> <li>• Helligkeitssensor (z. B. PASCO PS-3213 oder LowCost-Fotosensor (s.u.))</li> </ul> <p>Messexperiment zum Brewster-Winkel</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• COB-Taschenlampe oder gut beleuchtetes Objekt</li> <li>• Glasscheibe auf Stativ</li> <li>• Polarisationsfilter oder polarisierende Sonnen- oder Skibrille</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 13 5 eA Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die Lichtintensität hinter zwei Linearpolarisationsfiltern in Abhängigkeit vom Winkel zwischen ihren Polarisationsrichtungen und vergleichen sie mit den theoretischen Vorhersagen. Sie untersuchen und erklären an ausgewählten Beispielen Auftreten und Anwendung polarisierten Lichts in Natur und Technik auch unter Zuhilfenahme selbst recherchierter, digitaler Quellen.

### Ziele

Im Rahmen dieses Schülerexperiments erweitern die Schülerinnen und Schüler (SuS) ihr Wissen über elektromagnetische Wellen aus Jahrgangsstufe 12. Dort haben sie die Polarisation zunächst als Eigenschaft der Dipolwellen kennengelernt. Nun wird diese Erkenntnis im experimentellen Umgang auf Lichtwellen erweitert.

Im freien Experimentieren mit Polarisationsfolien erkennen die SuS das Wirken von Polarisationsfiltern und damit die Polarisation als Eigenschaft des Lichtes. Sie wiederholen ihre Kenntnisse aus Jgst. 12 zur Polarisation von Dipolwellen. Dort war die Polarisationsrichtung als Richtung des elektrischen Feldes eingeführt worden, welches in

Dipolrichtung abgestrahlt wird. Experimentell nachgewiesen wurde die Polarisation z. B. durch die Ausrichtung einer Dipolantenne relativ zum Sender.

Die Lernenden begeben sich mit den Polarisationsfiltern auch auf die Suche nach Polarisationsphänomenen im Alltag (Sonnenbrille, flach reflektiertes Licht, LCD- und LED-Bildschirme). Diese Suche soll durch eine begleitende Internetrecherche unterstützt werden.

Neben der freien, entdeckenden Arbeit zur Polarisation soll das Phänomen auch quantitativ untersucht werden. Mit Hilfe geeigneter Sensoren wird der Lichtdurchlass durch ein System zueinander unterschiedlich orientierter Polarisationsfilter gemessen und mit dem Gesetz von Malus  $I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$  verglichen, wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen beiden Polarisationsrichtungen ist. Die Abhängigkeit soll dabei auch mit dem Zeigerformalismus erklärt werden, wobei der Zeiger Stärke und Richtung des elektrischen Feldes beschreibt. Den Betrag der Intensität erhält man durch Quadrieren der Feldstärkenamplitude, welche der Zeigerlänge entspricht.

Als letzter Schritt kann die Auswirkung eines dritten Filters zwischen zwei um  $90^\circ$  zueinander verdrehten Filtern untersucht werden. Das Licht kann dabei das System trotz der gekreuzten Filter passieren. Dieses Phänomen wird ebenfalls mit dem Zeigerformalismus erklärt.

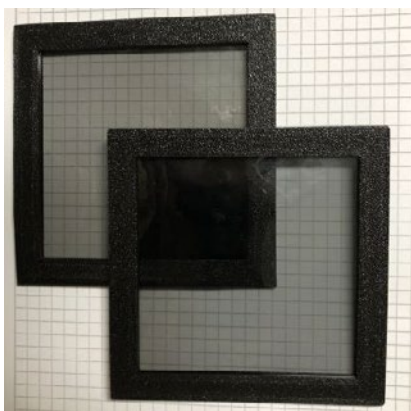
## 1. Teil: Freihandexperimente

Zum Nachweis der Polarisation eignen sich diverse Freihandexperimente, die als Auswahlmöglichkeit gedacht sind und hier nur kurz zusammengefasst werden.

### Kreuzen von zwei Polarisatoren

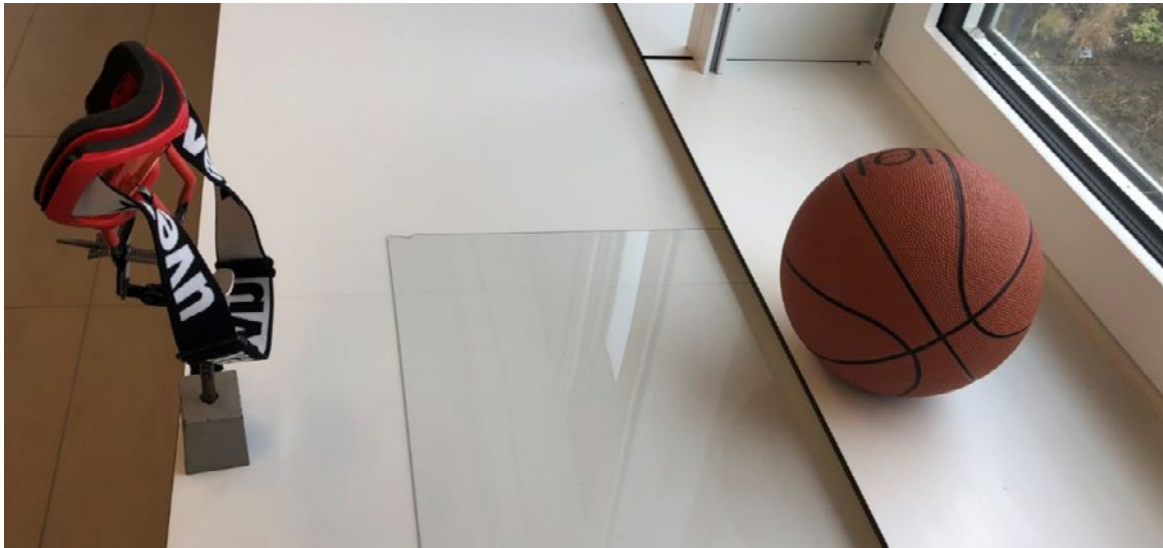
Dies ist das klassische Einstiegsexperiment. Die SuS schauen durch zwei Polarisationsfilter, wobei einer um bis zu  $90^\circ$  nach rechts und links verdreht wird. Die Verdunklung bei der  $90^\circ$ -Stellung wird erkennbar.

Als Polarisationsfilter eignen sich hier vor allem großformatige Folienfilter. Im hier gezeigten Beispiel wurde ein passender Rahmen im 3D-Druck erstellt.



**Abb. 1:** zwei gekreuzte Polarisationsfolien.

## Reflexionsunterdrückung bei einer Sonnen- oder Skibrille



**Abb. 2:** Wird die Reflexion in einer Glasscheibe durch eine polarisierende Skibrille betrachtet, verschwindet die Reflexion fast vollständig (siehe Abb. 3).

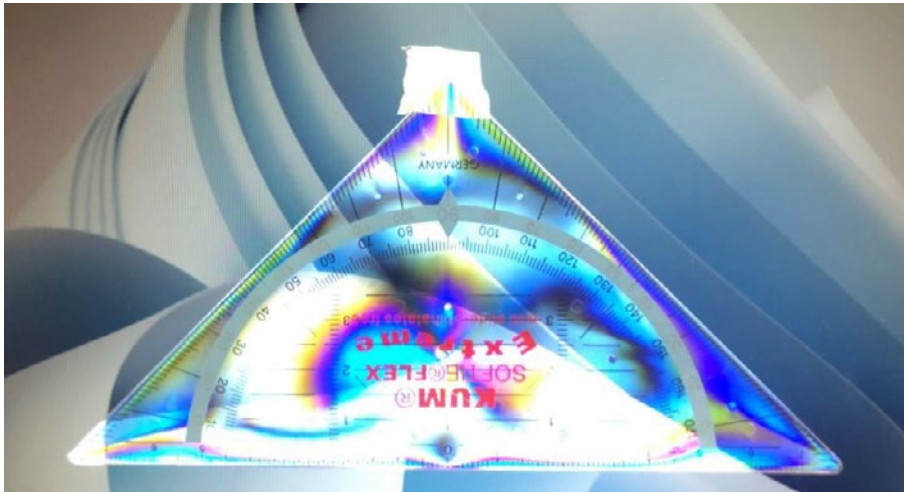
Viele Sonnenbrillen und die meisten hochwertigen Skibrillen beinhalten Polarisationsfilter. Diese absorbieren das Sonnenlicht, das von Wasser- oder Schneeflächen flach reflektiert wird, und verringern somit ein Blenden. Die Funktion dieses Filters wird bei der Betrachtung des Brewster-Gesetzes klar. Im Freihandexperiment wird zunächst nur die Richtung der Polarisation bestimmt. Dazu wird die reflektierende Schnee- oder Wasserfläche durch eine waagrechte Glasscheibe ersetzt (siehe Abb. 2). Im richtigen Blickwinkel verschwindet die Reflexion beim Blick durch eine senkrecht polarisierende Brille oder einen entsprechenden Polarisationsfilter nahezu vollständig (siehe Abb. 3)



**Abb. 3:** Freihandexperiment zum Brewster-Gesetz. Bei einem Blickwinkel von ca.  $30^\circ$  zur Ebene der Glasscheibe verschwindet die Reflexion in der Glasscheibe fast vollständig, wenn der Blick durch einen geeignet orientierten Polarisationsfilter erfolgt. Das Bild zeigt links den Blick ohne und rechts durch einen Polarisationsfilter mit senkrechter Polarisationsrichtung.

## LCD- Bildschirme

Verschiedene Digitaldisplays arbeiten mit polarisiertem Licht. Die Schüler untersuchen verschiedene Displays, indem Sie diese durch Polarisationsfilter betrachten. Manche zeigen interessante Farbeffekte, während andere vollständig polarisiertes Licht abgeben und somit bei einer bestimmten Stellung des Polarisationsfilters nicht mehr zu erkennen sind. Moderne Displays verwenden dabei neben der linearen Polarisation auch zirkular polarisiertes Licht und  $\lambda/4$ -Folien. Touchscreen-Displays zeigen dabei deutlich weniger Effekte, da die Schichten zur Berührungswahrnehmung die Polarisation größtenteils aufheben. Eine Internetrecherche zu den verschiedenen Display-Typen (TFT, LCD, LED) kann dieses Thema vertiefen.



**Abb. 4:** Geodreieck vor einem Computermonitor durch einen weiteren Polarisationsfilter betrachtet. Hier spielen die Polarisation des Bildschirmlichtes und die Spannungspolarisation im Geodreieck farbig bunt zusammen. Ebenfalls polarisierend wirkt das Klebeband, mit dem das Geodreieck am Bildschirm fixiert ist.

## Spannungspolarisation in Kunststoffen

Wird z. B. ein Geodreieck oder ein anderer Gegenstand aus Acrylglas zwischen zwei gekreuzte Polarisationsfilter gebracht und das Licht in Durchsicht betrachtet, so ist der Gegenstand zu erkennen und erscheint an verschiedenen Stellen farbig. Ursache ist ein Effekt, der das durchsichtige Material unter Spannung doppelbrechend werden lässt und so elliptisch oder zirkular polarisiertes Licht erzeugt, welches dann den zweiten Polarisationsfilter wellenlängenabhängig anteilig passieren kann. Als polarisiertes Hintergrundlicht ist ein Flachbildschirm besonders gut geeignet (siehe Abb. 4)

## 3D-Projektoren bzw. 3D-Kino

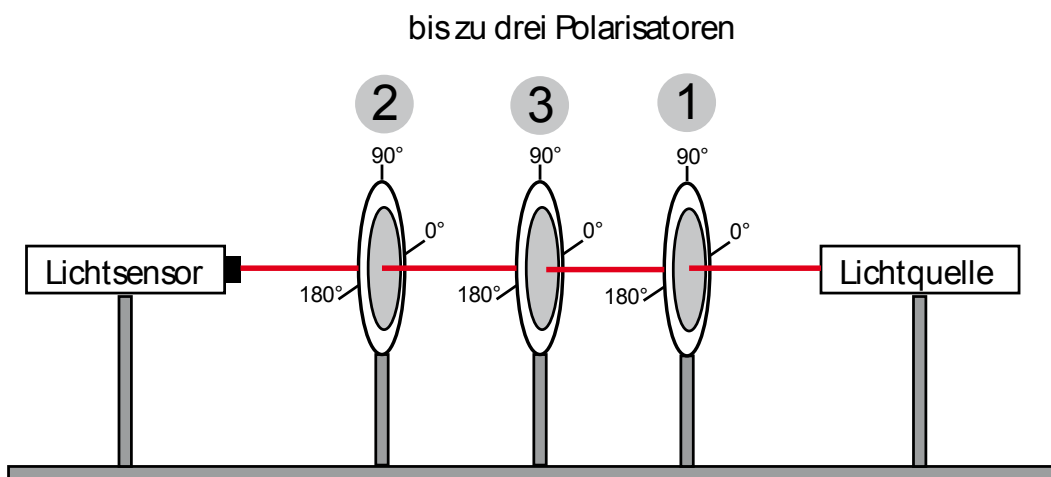
3D-Brillen im Kino enthalten oft Polarisationsfilter, die für die beiden Augen um  $90^\circ$  zueinander verdreht sind. Die Filmbilder für das jeweilige Auge werden abwechselnd mit unterschiedlichen Polarisationen projiziert und sind so nur für das jeweilige Auge erkennbar.

## 2. Teil: Messexperiment zum Gesetz von Malus

### Aufbau

Abb. 5 zeigt schematisch den grundlegenden Aufbau des Experimentes. Zwischen einer Lichtquelle und einem Lichtsensor werden bis zu drei drehbare Polarisationsfilter aufgestellt. Als Lichtsensor können die Sensoren der gängigen Messwerterfassungssysteme verwendet werden, es eignen sich aber auch einige Smartphones, deren Sensordaten z. B. mit der PhyPhox-App erfasst werden können. Vorrangiges Ziel des Experimentes ist die Messung der durchgelassenen Lichtintensität abhängig vom Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen der Filter.

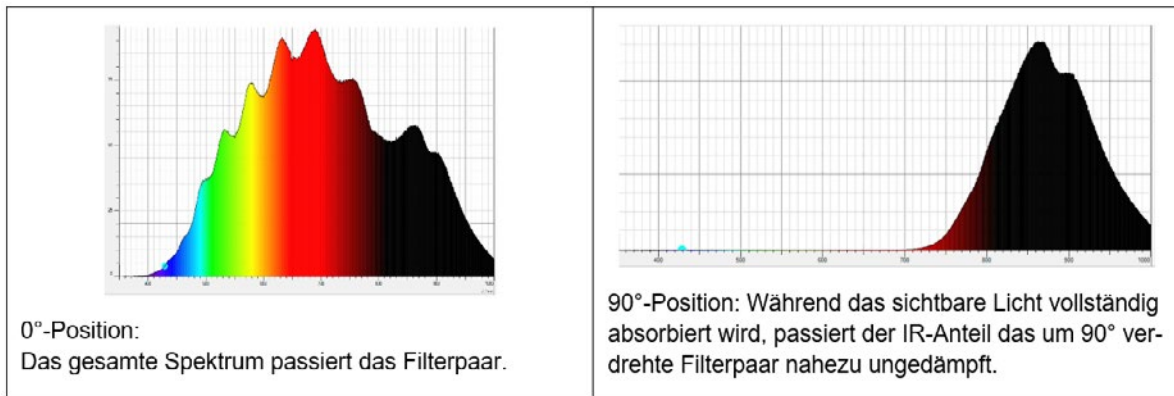
Da bei diesem Experiment das geeignete Zusammenspiel von Lichtquelle und Sensor entscheidend für den Messerfolg ist, werden im Folgenden zunächst gängige Lichtquellen und geeignete Sensoren vorgestellt sowie Vor- und Nachteile diskutiert.



**Abb. 5:** Schematischer Aufbau des Messexperimentes zur Polarisation von Licht.

### 1. Thermische Lichtquellen

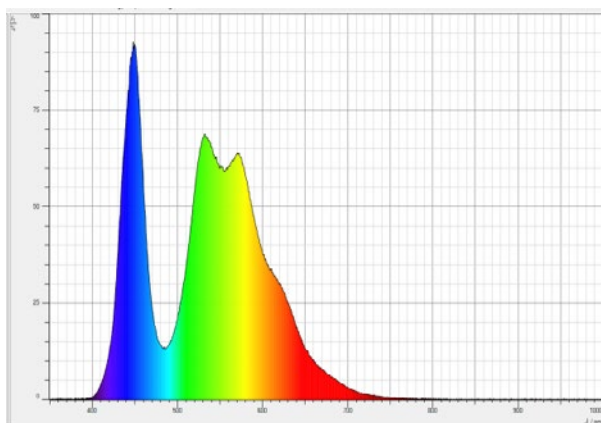
Typische thermische Lichtquellen sind die vielfach verwendeten Halogen-Lampen, oft als Strahler ausgebildet, oder die gute, alte Glühbirne. Die Untersuchung mit einem Polarisationsfilter zeigt keine Vorzugsrichtung, das ausgesendete Licht ist nicht polarisiert. Nachteil dieser Lichtquellen ist der hohe Anteil an IR-Strahlung, welche von den meisten Lichtsensoren wahrgenommen, von gängigen Polarisationsfiltern aber oft unzureichend beeinflusst wird. Hier kann es dazu kommen, dass der Lichtsensor beim Verdrehen der Polarisatoren in die  $90^\circ$ -Stellung nahezu keine Abnahme registriert, obwohl mit bloßem Auge eine deutliche Abdunkelung erkennbar ist. Abbildung 6 zeigt das Spektrum einer Halogenlampe nach dem Durchlaufen zweier Polarisationsfilter, einmal um  $0^\circ$  und einmal um  $90^\circ$  zueinander verdreht. Während der sichtbare Anteil bei  $90^\circ$  ausgeblendet ist, kann das IR-Licht das gekreuzte Filterpaar nahezu unbeeinflusst passieren und wird im Sensor registriert. Daher sind solche Lichtquellen für quantitative Polarisationsversuche mit Messwerterfassung in der Regel ungeeignet. Ein IR-Filter aus dem Fotobedarf kann Abhilfe schaffen.



**Abb. 6:** Spektrale Intensität des Lichtes einer Halogenlampe nach dem Durchlaufen von zwei Polarisationsfiltern, die einmal parallel und einmal senkrecht zueinander ausgerichtet sind.

## 2. LED-Lampen

Statt der Glühbirne sind mittlerweile in vielen Lampen LED-Elemente eingebaut. Gerade die flächigen sogenannten COB-LEDs (COB: Chip on Board) liefern ein spektral breites Licht, das nicht polarisiert ist. Als COB-Taschenlampen sind sie günstig zu erwerben. Die Lichtintensität ist dabei zum Teil so stark, dass beim Umgang Vorsichtsmaßnahmen gegen einen direkten Blick aus der Nähe in die Quelle getroffen werden sollten.



**Abb. 7:** Spektrum und Foto einer COB-LED-Taschenlampe.

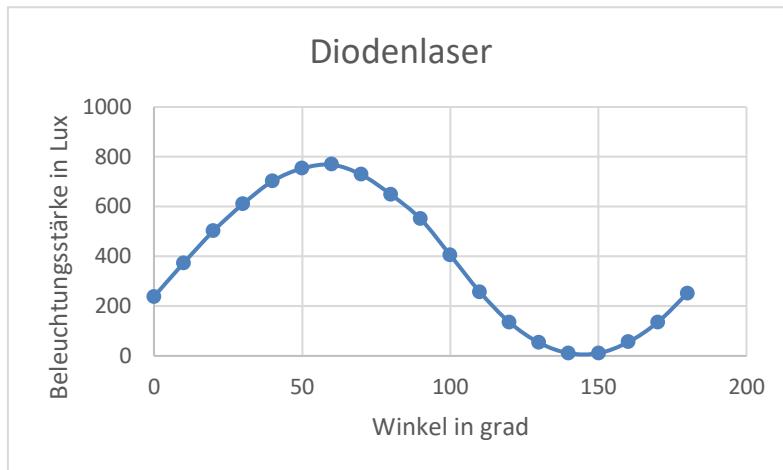
Für die vorgestellten quantitativen Polarisationsexperimente erwies sich eine solche COB-Taschenlampe als beste Lichtquelle. Die für die hier vorgestellten Messungen verwendete Lampe hat eine Leuchtstärke von knapp 200 Lux, was mehr als ausreichend ist.

## 3. Halbleiterlaser

Halbleiterlaser sind in der Regel die Standardlichtquelle für die Wellenoptik. Ihre gerichtete Lichterzeugung und die große Kohärenzlänge sind ideal für Interferenzexperimente. Allerdings senden sie auch hochgradig oder gar vollständig polarisiertes Licht aus. Vorteil eines Lasers ist das schmale Spektrum und die gerichtete Ausbreitung. Streulichteffekte und störende IR-Anteile können so nahezu vollständig eliminiert werden

Vor der Verwendung eines Halbleiterlasers muss aber die Polarisierung des Lasers vermessen werden, denn das Experiment setzt ja eigentlich unpolarisiertes Licht voraus. Dafür wird zwischen Lichtquelle und Sensor ein Polarisator gestellt und von 0° bis 180°

durchgedreht. Die Intensität wird hier in  $10^\circ$ -Schritten gemessen (siehe Abb. 8). Das Licht des hier untersuchten Diodenlasers ist bereits vollständig polarisiert, die Beleuchtungsstärke am Sensor fällt bei etwas unter  $150^\circ$  auf nahezu 0 Lux ab. Damit liegt die Polarisationssebene des hier verwendeten Lasers bei ca.  $60^\circ$ . Der erste Filter im Experiment sollte in diese Richtung ausgerichtet werden. Der hier zum Ausmessen verwendete Filter kann somit gleich als erster Filter im Experiment verwendet werden.



**Abb. 8:** Bestimmung der Polarisationsrichtung eines Halbleiterlasers.

## Lichtsensoren

Auch auf der Seite des Lichtsensors gibt es verschiedene Möglichkeiten. Es gibt einfache Sensoren, die lediglich den Strom durch einen Fotowiderstand messen, während andere Sensoren auf CMOS-Basis funktionieren und so sogar Farben unterscheiden können.

Die Messung erfolgt meist in den Einheiten Lux oder  $\text{W/m}^2$ , die RGB-Sensoren geben oft auch relative RGB-Werte aus. Für diese Versuche sollte die Lichtintensität in  $\text{W/m}^2$  oder die Beleuchtungsstärke in Lux gemessen werden. Letztere ist ebenfalls geeignet, da sie zur Intensität direkt proportional ist.

Für die hier vorgestellten Messungen wurde ein Lichtsensor der Firma PASCO (wireless light sensor PS-3248) verwendet.

Im Anhang ist auch noch eine LowCost-Variante mit einer Fotodiode dokumentiert.

## Durchführung und Messung

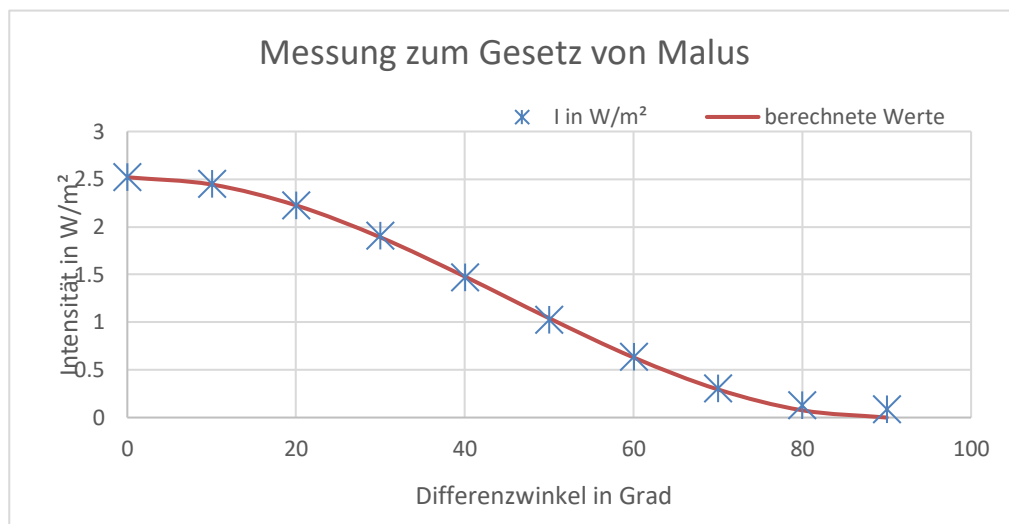
Die Durchführung erfolgt in zwei Schritten, wobei jeweils ein Polarisationsfilter mehr in die Anordnung gestellt wird. Abbildung 9 zeigt den hier verwendeten Aufbau. Als Lichtquelle wurde eine COB-Taschenlampe verwendet.



**Abb. 9:** Für diese Messungen verwendeter Versuchsaufbau.

### Durchlasskurve von zwei Polarisatoren, abhängig von der Winkeldifferenz – Nachweis des Gesetzes von Malus

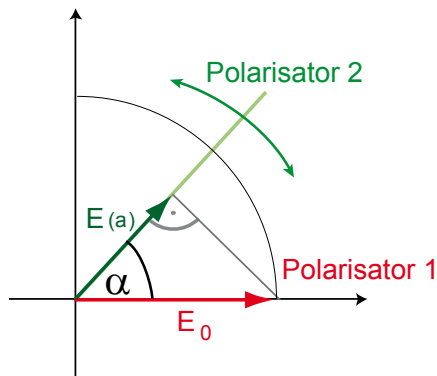
Zwischen Lichtquelle und Sensor werden zwei Polarisationsfilter gestellt. Eine aufgedruckte Winkelskala erleichtert die Winkelmessung. Der erste Filter steht bei  $90^\circ$  (senkrechte Polarisation), der zweite Filter wird nun schrittweise von  $90^\circ$  auf  $0^\circ$  gedreht. So ergeben sich Differenzwinkel von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ . Bei einem Differenzwinkel von  $90^\circ$  sollte die Beleuchtung oder Intensität auf 0 gehen. Ist dies nicht der Fall, so könnte die Lichtquelle einen deutlichen IR-Anteil haben, welcher die Filter passiert (s. o.), oder der Sensor registriert noch relativ viel Streu- und Umgebungslicht. Bei Streulicht kann eine kleine Röhre vor dem Sensor Abhilfe schaffen. Ebenfalls ist es sinnvoll, den Raum etwas abzudunkeln. Hilft auch das nicht, bleibt noch die Möglichkeit, den  $90^\circ$ -Wert in der Auswertung als Offset abzuziehen.



**Abb. 10:** Nachweis der  $\cos^2$ -Abhängigkeit der durchgelassenen Intensität.

In der Auswertung der Daten (siehe Abb. 10) zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Verlauf, der durch  $I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$  vorgegeben wird. Lediglich der Nullwert bei  $\alpha = 90^\circ$  wird auf Grund von Streulichte effekten nicht ganz erreicht. Für  $I_0$  wird in der Modellierung der Maximalwert  $I(0^\circ) = 2,5 \text{ W/m}^2$  verwendet.

Das Gesetz von Malus  $I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$  kann im Zeigerdiagramm mit der Projektion der Ausgangspolarisation auf die neue Richtung erläutert werden.



Polarisator 2 lässt nur den Anteil des elektrischen Feldes  $E_0$  in der neuen Richtung durch. Für den Betrag des elektrischen Feldes ergibt sich somit:

$$E(\alpha) = E_0 \cdot \cos(\alpha)$$

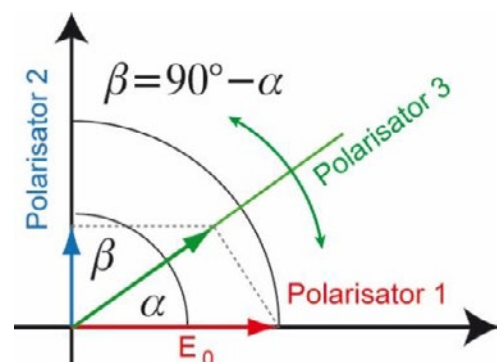
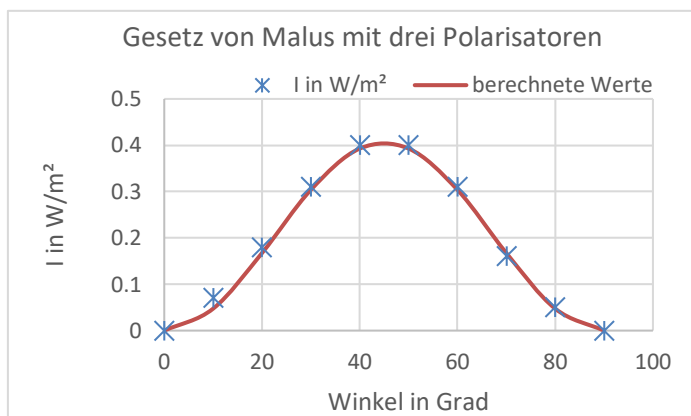
Die Intensität ergibt sich durch Quadrieren:

$$I(\alpha) = [E(\alpha)]^2 = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$$

### Dritter Polarisator zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren

Die vorangegangene Messung zeigt, dass Licht zwei gekreuzte Polarisationsfilter eigentlich nicht passieren kann. Wird allerdings zwischen die beiden ein dritter Filter gestellt, so kann bei dessen nichtparalleler Stellung zu einem der beiden anderen Polarisationsfilter wieder eine Intensität am Detektor nachgewiesen werden.

Abb. 11 zeigt den gemessenen und den erwarteten Intensitätsverlauf. Der theoretische Verlauf ergibt sich hierbei durch die zweifache Anwendung des Gesetzes von Malus, wobei diesmal mit  $\alpha$  der Differenzwinkel zwischen 3. und 1. Polarisator ( $0^\circ$ -Stellung) bezeichnet wird. Der Differenzwinkel zwischen 2. und 3. Polarisator ergibt sich somit zu  $90^\circ - \alpha$ . Für die Berechnung der Gesamtintensität folgt somit  $I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \cos^2(90^\circ - \alpha)$ . Um die Werte zu berechnen, muss auch hier die Maximalintensität von  $I_0$  gemessen werden. Hierzu dreht man alle drei Polarisationsfilter in die gleiche Richtung. So werden mit  $I_0 = 1,62 \text{ W/m}^2$  die an jedem Polarisator reflektierten und absorbierten Intensitäten entsprechend berücksichtigt.



**Abb. 11:** Durchgelassene Intensität bei drei Polarisatoren mit  $I_0 = 1,62 \text{ W/m}^2$ .

Vergleicht man die Intensität bei  $\alpha = 45^\circ$  mit  $I_0$  bei drei parallelen Polarisationsfiltern, so erkennt man, dass diese 25% von  $I_0$  entspricht. Dies ist im Einklang mit der vierfachen Multiplikation von  $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Es ergibt sich  $[\cos(45^\circ)]^4 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^4 = 0,25$ .

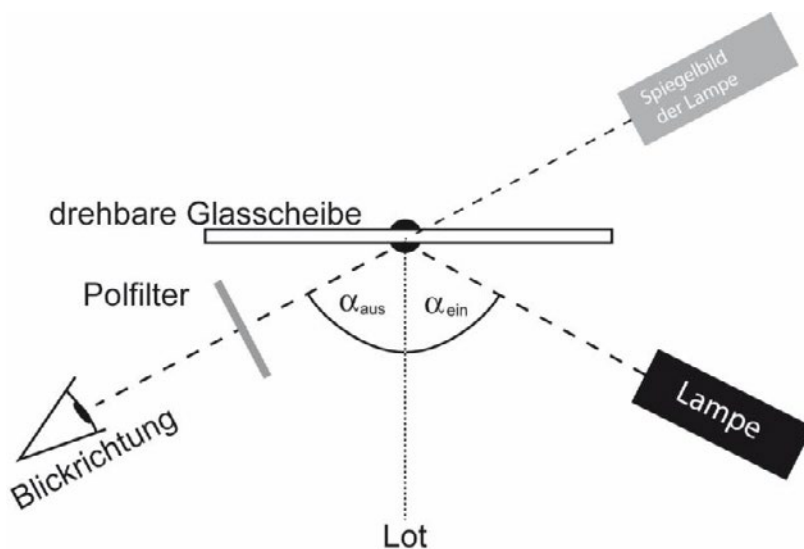
### 3. Teil: Messexperiment zum Brewster-Winkel

Das Freihandexperiment zur Polarisation des reflektierten Lichtes an einer Glasscheibe und die Unterdrückung dieser Reflexion durch eine Ski- oder Sonnenbrille kann in einem weiteren Messexperiment vertieft werden. Hierbei finden die Schüler durch eine Recherche selbstständig den Brewster-Winkel als Ursache heraus und untersuchen diesen quantitativ mit einem geeigneten Aufbau.

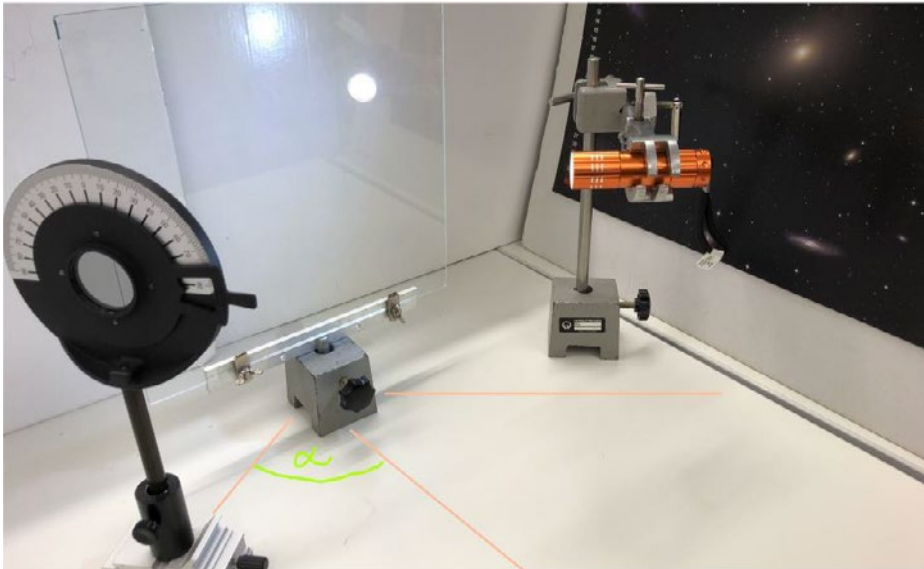
#### Aufbau und Durchführung

Die Abbildungen 12 und 13 zeigen den Versuchsaufbau, einmal schematisch und einmal im Foto. Das Spiegelbild der Lampe in der Glasscheibe wird durch einen Polarisationsfilter betrachtet. Im Gegensatz zur horizontalen Ausrichtung der Glasscheibe im Freihandexperiment ist hier ein senkrechter Aufbau sinnvoller, denn Einfalls- und Ausfallswinkel können so gut eingestellt und in der senkrechten Projektion auf die Tischoberfläche gemessen werden.

Polarisationsfilter und Lichtquelle werden nun so bewegt, dass Ein- und Ausfallswinkel symmetrisch vergrößert bzw. verkleinert werden. Dabei wird die Intensität der reflektierten Strahlung bzw. das Spiegelbild der Lampe in der Glasscheibe bei verschiedenen Stellungen des Polarisationsfilters beobachtet.



**Abb. 12:** Schematischer Aufbau des Messexperimentes zum Brewster-Winkel.



**Abb. 13:** Foto des Versuchsaufbaus mit Projektion der Geometrie und angedeutetem Winkel  $\alpha$  in der Tischebene.

### Auswertung

Den SuS sollte beim Betrachten und Variieren des Spiegelbildes auffallen, dass die reflektierte Intensität sowohl vom Reflexionswinkel als auch von der Polarisationsrichtung abhängt. Winkel und Polarisation werden dabei systematisch so variiert, so dass ein Minimum der reflektierten Intensität erreicht wird.

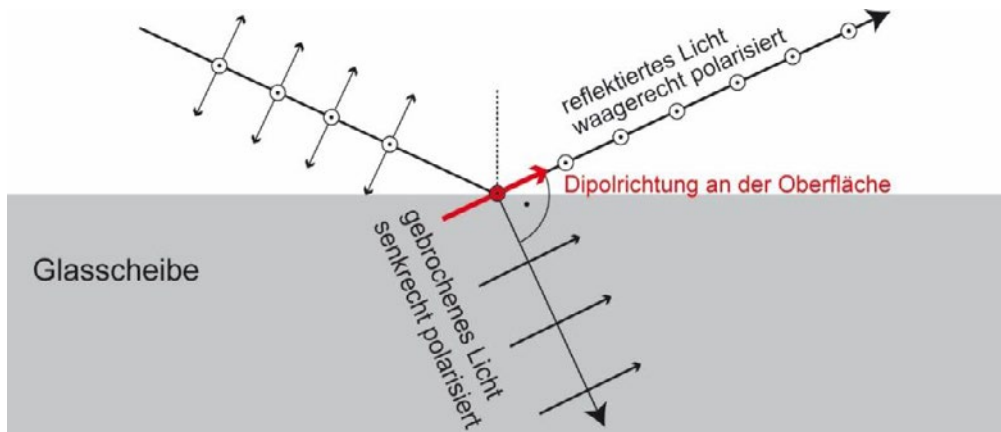
Die Beobachtungen werden mit einer geeigneten Skizze dokumentiert und der beobachtete Winkel als Ein- und Ausfallswinkel zum Lot sowie die Polarisation werden notiert.

Ein Hinweis auf den Begriff „Brewster-Winkel“ kann Ausgangspunkt einer Internetrecherche sein, um eine Erklärung des beobachteten Phänomens im Nachgang des Experiments zu finden bzw. zu erstellen. Dabei kann auch das Brewster-Gesetz:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{n_2}{n_1},$$

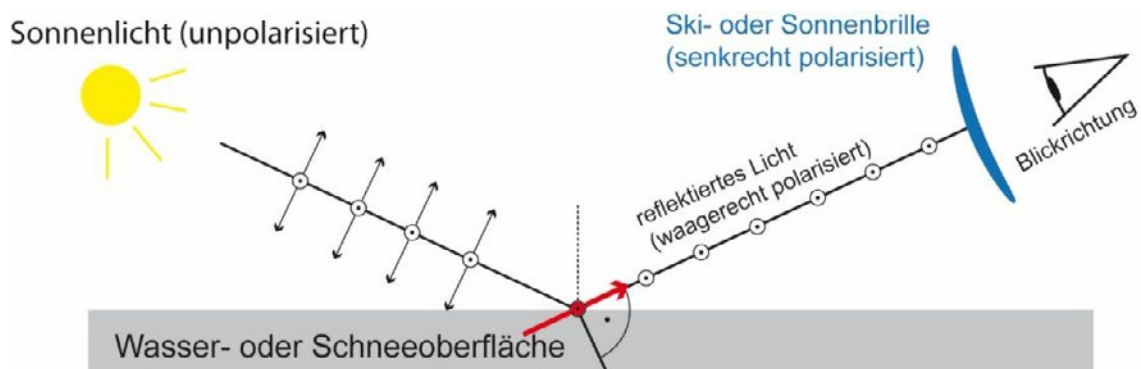
welches den Winkel  $\alpha$  zum Lot hin abhängig von den Brechungsindizes beschreibt zur Anwendung kommen. Hier ist  $n_1 = 1$  der Brechungsindex von Luft und  $n_2 \approx 1,5$  der Brechungsindex von einfachem Glas, was einen Brewster-Winkel von etwa  $56^\circ$  zum Lot hin ergibt.

Die Tatsache, dass die unter dem Brewster-Winkel reflektierte Strahlung nahezu vollständig parallel zur Glasscheibe polarisiert ist, kann durch Abbildung 14 gut erklärt werden. Die Reflexion an der Glasscheibe erfolgt durch das Anregen von Schwingungen in der Glasoberfläche, welche das Licht in reflektierter und gebrochener Richtung abstrahlen. Beim Brewster-Winkel (reflektierter und gebrochener Strahl stehen senkrecht aufeinander) wird deutlich, dass bei Polarisation senkrecht zur Glasoberfläche die Abstrahlung in Dipolrichtung erfolgen müsste, was gemäß der Abstrahlcharakteristik eines Dipols nicht möglich ist. Daher wird bei diesem Reflexionswinkel nur parallel zur Oberfläche polarisiertes Licht reflektiert.



**Abb. 14:** Beim Brewster-Winkel sind reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht zueinander. Reflektiertes Licht ist nur parallel zur Oberfläche polarisiert, da die senkrechte Komponente in Dipolrichtung abgestrahlt werden müsste.

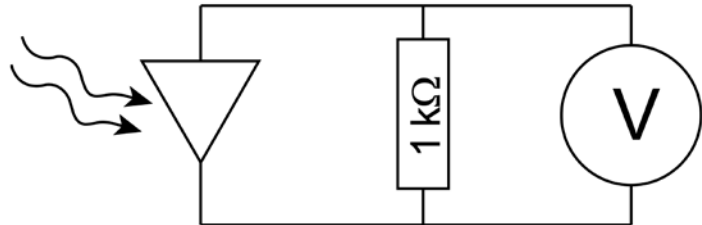
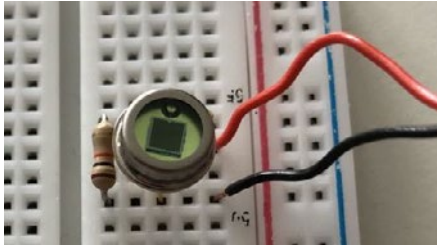
Mit Hilfe des Brewster-Winkels lässt sich jetzt auch die Ausrichtung des Polarisationsfilters in vielen Sonnen- und Skibrillen erklären (siehe Abb. 15). Die Gläser absorbieren effektiv das polarisierte Licht, das bei der Reflexion an einer waagerechten Schnee- oder Wasseroberfläche entsteht. Dadurch wird ein Blenden durch reflektiertes Licht deutlich reduziert.



**Abb. 15:** Eine senkrecht polarisierte Skibrille absorbiert effektiv das waagrecht polarisierte reflektierte Sonnenlicht der Schneefläche.

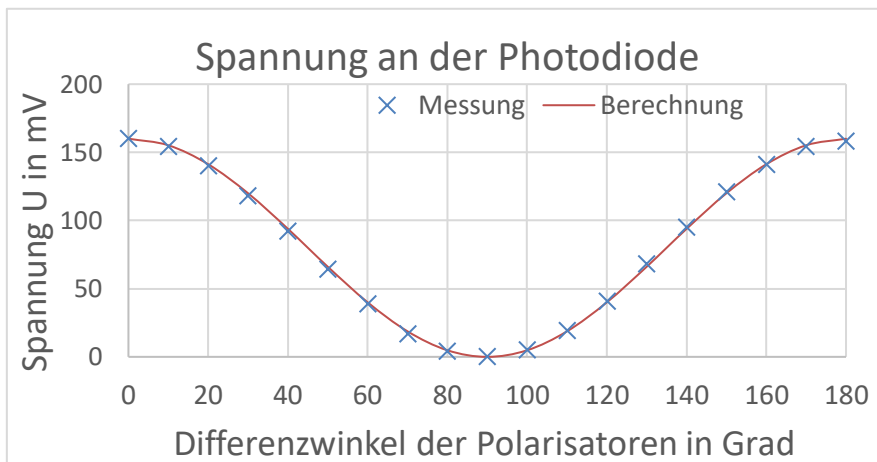
## Information: Low-Cost-Lichtsensord

Neben den kommerziellen Lichtsensoren gibt es für diese Messungen auch eine einfache und kostengünstige Möglichkeit, indem eine Fotodiode verwendet wird (siehe Abb. 16).



**Abb. 16:** Fotodiode als einfacher Lichtsensor. Die Spannung am Lastwiderstand ist proportional zum erzeugten Fotostrom und kann als Signal zur Messung der Lichtintensität verwendet werden..

Dazu wird an eine Silizium-Fotodiode (hier: Typ BPW 21, ca. 10 €) lediglich ein geeigneter Lastwiderstand (hier 1 kΩ) angeschlossen, am dem die abfallende Spannung gemessen wird. Diese Spannung ist dann zum Fotostrom und damit zur Lichtleistung proportional. Beim Verwenden einer Taschenlampe als diffuse Lichtquelle ist es hier sinnvoll, eine Sammellinse einzubauen, welche das Licht auf die kleine Fotozelle fokussiert bzw. die Lichtquelle auf die Fotozelle abbildet. Für eine gute Messung ist eine recht hohe Intensität notwendig, um einen genügend großen Fotostrom und damit eine gut messbare Spannung im Bereich von ca. 0,5 V zu erzeugen. Abb. 17 zeigt eine mit dieser Methode durchgeführte Messung. Auch hier sind die Messwerte in guter Übereinstimmung mit der berechneten  $\cos^2$ -Kurve.



**Abb. 17:** Messung der Lichtintensität mit einer Fotodiode. Das Diagramm zeigt den Vergleich der berechneten  $\cos^2$ -Kurve (rot) mit den Messwerten (blau)..

## Information: Smartphone als Lichtsensor

Auch ein Smartphone kann als quantitativer Lichtsensor genutzt werden. Hierzu finden sich in den App-Stores verschiedene kostenfreie Programme, die entweder die Kamera oder separate Lichtsensoren auslesen und als Messwerte anzeigen. Werden zwei Polarisationsfilter über den Sensor gelegt kann die Lichtintensität abhängig vom Differenzwinkel gemessen werden (siehe Abb. 18).



**Abb. 18:** Smartphone mit entsprechender App als Helligkeitssensor.

Teil 1



Teil 2



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

## 2.10 Hintergrundinformation zum Schülerexperiment Bestimmung des Planck'schen Wirkungsquantums mit der Gegenfeldmethode

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	13 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
Benötigtes Material	<p>Photonenquellen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• LED blau, LED grün, LED rot</li> <li>• Krokodilklemmen bzw. Abgreifklemmen zur Kontaktierung</li> <li>• AA-Batterien zur Stromversorgung der LEDs</li> <li>• ggf. optisches Gitter für einen Vorversuch zur Bestimmung der Wellenlängen der LEDs</li> </ul> <p>Photozelle mit Gegenspannung</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Phototube mit Cäsium z. B. electron-tube-photocell-miniature-7-pin-tube-90cv</li> <li>• Stativmaterial z. B. "Dritte Hand" und Schlauch</li> <li>• Netzgerät mit regelbarer Spannung 0 bis 2 V</li> </ul> <p>Messgeräte</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Stromstärkemessgerät <math>\mu\text{A}</math></li> <li>• Spannungsmessgerät mit 0,01 V Genauigkeit</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 13 5 Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen beim lichtelektrischen Effekt mit der Gegenfeldmethode einen Näherungswert für das Planck'sche Wirkungsquantum. Sie minimieren die Auswirkungen der Messunsicherheiten, deren Einflüsse sie auch unter Einsatz digitaler Auswerteroutinen quantitativ analysieren.

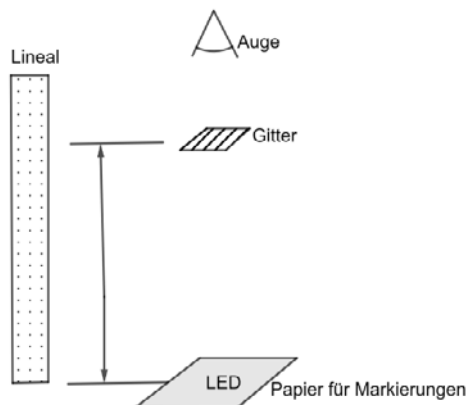
### Aufbau

#### Optionaler Vorversuch: Bestimmung der Wellenlänge der LEDs

Die Schülerinnen und Schüler schließen eine LED an das Netzgerät an (langes Bein an den Pluspol) und regeln die Spannung so lange hoch, bis die LED leuchtet. Sie legen sie flach auf ein Stück Papier und markieren ihre Lage. Nun schauen sie durch ein optisches Gitter direkt von oben auf die LED und messen den Abstand des Gitters zum Papier mit einem Lineal. Sie markieren die Lage eines virtuellen Maximums auf dem Papier und berechnen aus Gitterkonstante, Abstand Gitter – Papier und Abstand des Maximums von der LED die Wellenlänge der LED.

Bemerkungen: Aus diesem Vorversuch kann direkt das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden, indem die Spannung bestimmt wird, bei der die LED gerade zu leuchten beginnt (vgl. schriftliche Abiturprüfung 2023). Daran ist im Lehrplan nicht gedacht.

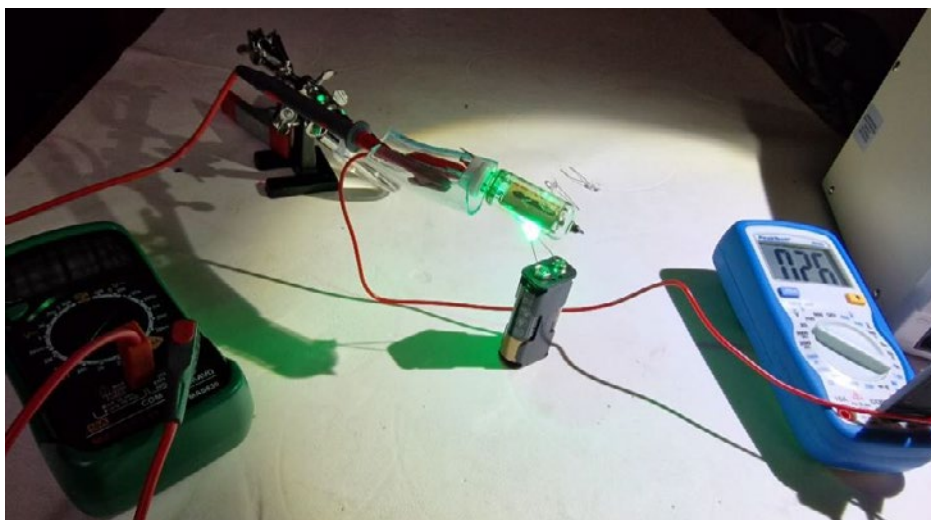
Die Breite des Spektrums kann bei einer LED einige zehn Nanometer betragen. Dennoch wird in der Regel nur die Wellenlänge größter Intensität angegeben. Dies bedeutet, dass das emittierte Licht zum Teil energiereicher ist als nach der Emissionswellenlänge berechnet.



**Abb. 1:** Schematischer Aufbau zur Bestimmung der Emissionswellenlänge der LEDs

### Aufbau des Versuchs

Die LED wird auf die Batterie gesteckt. Die Phototube wird oberhalb der LED platziert z. B. halb in einen Schlauch gesteckt, der von einer „Dritten Hand“ gehalten wird. Der Anschluss, bei dem das Licht einfällt, wird mit dem Minuspol der Spannungsquelle verbunden. Der Kathodenanschluss, der zur Cäsiumplatte führt, wird mit dem Pluspol der Spannungsquelle verbunden. Das Stromstärkemessgerät wird in den Stromkreis eingebaut, das Spannungsmessgerät parallel zur Spannungsquelle geschaltet (siehe Abb. 2).

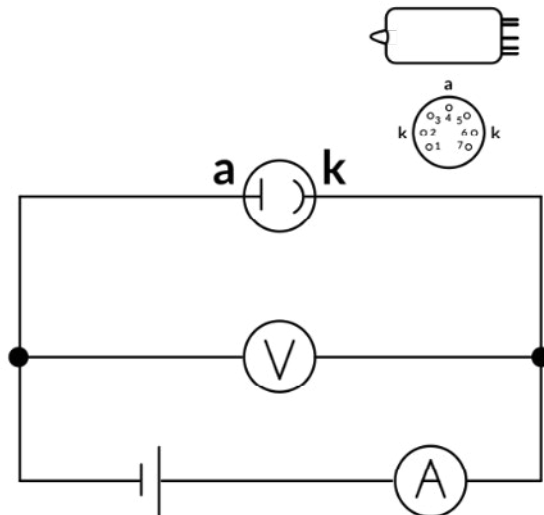


**Abb. 2:** Versuchsaufbau zur Bestimmung der Gegenspannung

## Messung und Auswertung

Ohne angelegte Gegenspannung wird die Photozelle zunächst so ausgerichtet und fixiert, dass die gemessene Stromstärke maximal ist.

Die Spannung wird so lange erhöht, bis kein Strom mehr fließt. Dieser Spannungswert wird für jede LED notiert. Ggf. wird um den Nullwert der Stromstärke herum die Spannung wieder leicht gesenkt, um möglichst exakt den Wert zu finden, bei dem die Elektronen nicht mehr gegen die Gegenspannung anlaufen können.



**Abb. 3:** Schaltplan der Versuchsdurchführung (bei der vorgestellten Photodiode sind die Pins 2 und 6 intern verschaltet mit der Cäsiumkathode. Der Anschluss an die Anode erfolgt über Pin 4. Die restlichen Pins dienen nur zur Halterung)

Die gemessenen Spannungswerte und die zugehörigen Frequenzen der LEDs werden in ein Tabellenkalkulationsprogramm eingetragen. Es erfolgt eine graphische Auswertung unter Beachtung der Messunsicherheiten.

Die Wellenlängenbereiche der LEDs sind in den Datenblättern angegeben. Wenn die Halbwertsbreiten der Spektralverteilung jeweils ähnlich sind, spielt dies aber für die Messunsicherheiten keine Rolle, da sich die Frequenzen dadurch höchstens im Diagramm nach rechts verschieben, die Steigung der Geraden aber gleich bleibt.

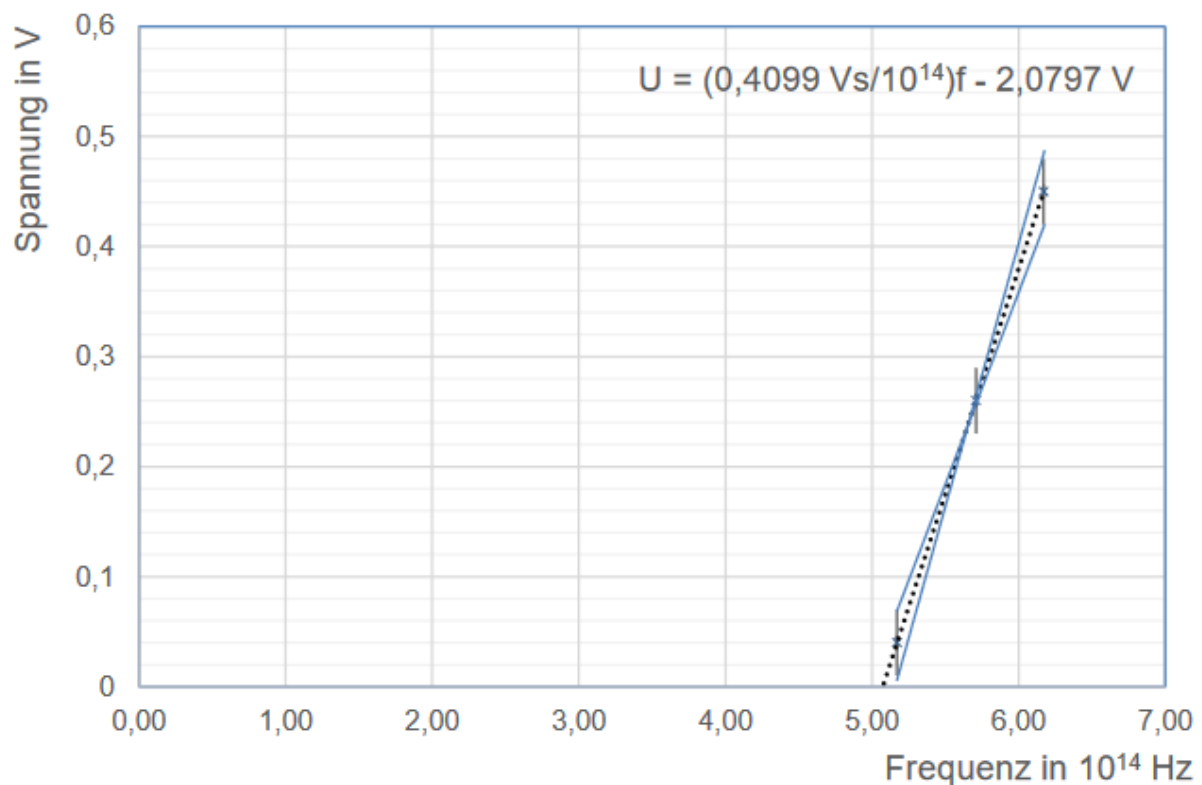
Den Dunkelstrom der Photozelle kann man gemäß Datenblatt vernachlässigen.

Die Messunsicherheit der Stromstärke steht im Datenblatt des Messgeräts, z. B. 1,0 %, ebenso die Messunsicherheit der Spannung, z. B. 0,5 %, also kann man die gesamte Messunsicherheit mit z. B. 1,5 % des eingestellten Spannungsbereichs von 2,0 V abschätzen.

Die in der Kompetenzerwartung geforderte Minimierung der Auswirkungen der Messungenauigkeiten auf das Gesamtergebnis kann beispielsweise durch eine Mehrfachmessung der einzustellenden Gegenspannung umgesetzt werden. Hierzu sind nach GUM<sup>1</sup> mindestens 10 Einzelmessungen erforderlich, so dass die Standardabweichung des Mittelwerts als Messunsicherheit angenommen werden kann.

Farbe der LED	blau	grün	gelb
Wellenlänge $\lambda$ in nm	$487 \pm 18$	$526 \pm 20$	$581 \pm 22$
Frequenz $f$ in $10^{14}$ Hz	$6,17 \pm 0,2$	$5,71 \pm 0,2$	$5,17 \pm 0,2$
Spannung $U$ in V	$0,45 \pm 0,03$	$0,26 \pm 0,03$	$0,04 \pm 0,03$

### Bestimmung des Planck'schen Wirkungsquantums mit der Gegenfeldmethode



**Abb. 4:** Bestimmung von  $h$

Die Auswertung kann mittels linearer Regression mit einem Tabellenkalkulationsprogramm erfolgen.

Achtung: Wegen Kontaktspannungen in der Schaltung (siehe Erläuterung im Serviceteil des LehrplanPLUS) ergibt die ermittelte Gegenspannung gemäß der Beziehung  $E_{\text{kin}} = eU$  nicht exakt die kinetische Energie der Photoelektronen. Da die Kontaktspannungen nur eine konstante vertikale Verschiebung bedingen, kann das Planck'sche Wirkungsquantum

<sup>1</sup> GUM: ISO/BIPM-Leitfaden Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement

dennoch als Steigung im  $f$ - $eU_{\text{gegen}}$ -Diagramm interpretiert werden. Innerhalb der Fehlerbalken der Messwerte lassen sich unterschiedliche Geraden zeichnen.

Der im Beispiel minimal mögliche Wert für  $h$  ist die Steigung zwischen den Punkten  $(5,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \mid 0,07 \text{ eV})$  und  $(6,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \mid 0,42 \text{ eV})$ , der maximal mögliche Wert für  $h$  ist die Steigung zwischen den Punkten  $(5,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \mid 0,01 \text{ eV})$  und  $(6,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \mid 0,48 \text{ eV})$ . Die Messunsicherheit ergibt sich aus dem maximalen Abstand der beiden Intervallgrenzen zum Bestwert, den die Trendlinie liefert.

Im Beispiel ergibt sich

$$h = (4,1 \pm 0,6) \cdot 10^{-15} \text{ eVs} = (6,57 \pm 0,96) \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$

Damit ist die Abweichung des Bestwerts vom Literaturwert unter 1 %.



***Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden***

## 2.11 Hintergrundinformationen zum Schülerexperiment Absorption und Reichweite von $\beta$ - oder $\gamma$ -Strahlung

Stand: 17.06.2024

Jahrgangsstufe	13 eA
Zeitraumen	2 Unterrichtsstunden
benötigtes Material	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Geiger-Müller-Zählrohr (ggf. Stoppuhr)</li> <li>• Radioaktives Präparat, z.B. Thorium-Glühstrumpf</li> <li>• höhenverstellbares Podest</li> <li>• mehrere Kärtchen aus Siebdruckkarton (1mm)</li> <li>• Messschieber oder Lineal</li> </ul>

### Kompetenzerwartungen

#### Ph 13 5 eA Experimentelles Arbeiten

Die Schülerinnen und Schüler planen Experimente zur Absorption und Reichweite von  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Strahlung und ermitteln aus den Messwerten mithilfe digitaler Werkzeuge die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten. Bei ihren Ergebnissen unterscheiden sie zwischen Messunsicherheit und Messabweichung.

### Ziel

In diesem Experiment verifizieren die Schülerinnen und Schüler (SuS) das Abstandsgesetz und bestimmen die Halbwertsdicke bei der Absorption von radioaktiver Strahlung. Damit richten sie ihren Fokus auf zwei Eigenschaften radioaktiver Strahlung mit besonderer Bedeutung für Strahlenschutzmaßnahmen. Außerdem lernen sie den Umgang mit den statistischen Messunsicherheiten kennen und berücksichtigen diese bei ihren Auswertungen.

Da im Schülerexperiment mit Freipräparaten mit geringer Aktivität ( $< 1$  kBq) gearbeitet wird, sind die Zählraten recht gering und liegen nur ein bis zwei Größenordnungen über der natürlichen Strahlung. Durch den statistischen Zerfallsprozess unterliegen die Messungen einer nicht zu vernachlässigenden Messunsicherheit. Berücksichtigt man die natürliche Strahlung nicht in der Modellierung, so weisen die Messergebnisse eine systematische Messabweichung auf. Diese kann und sollte vor der mathematischen Auswertung korrigiert werden. Somit erlangen die Betrachtungen von Messunsicherheiten und Messabweichungen bei diesem Experiment eine besondere Bedeutung.

#### Messgeräte

Das typische GM-Zählrohr ist auf Grund des kleinen Eintrittsfensters deutlich weniger empfindlich als der „Inspector“ (mittlerweile „Ranger“) der Fa. MEKRUPHY. Während der Inspektor in einem Zentimeter Abstand beim Glühstrumpf einige tausend Impulse pro Minute registriert, sind es beim Zählrohr nur knapp hundert Impulse pro Minute. Dafür hat man beim

Inspector aber auch mit ca. 60 Impulse pro Minute eine im gleichen Verhältnis höhere Untergrundstrahlung. Dargestellt ist hier die Durchführung mit dem GM-Zählrohr.

Günstigere Detektoren wie z. B. Joy-It JT-RAD01 haben oftmals kein definiertes Eintrittsfenster. Somit ist zumindest die Abstandsmessung problematisch. Auch für die Bestimmung der Strahlungsarten sind sie nicht geeignet, da sie keine  $\alpha$ -Strahlung registrieren. Diese Geräte erfüllen eher Dosimetertaufgaben und sind weniger zur Materialuntersuchung geeignet.

## Präparate

Um dem Strahlenschutz im Schülerexperiment gerecht zu werden, kommen selbstverständlich nur Präparate mit geringen Aktivitäten unter den festgelegten Freigrenzen zum Einsatz. Neben den Industriepräparaten der Lehrmittelfirmen ist der thoriierte Glühstrumpf (Auernetz) eine sinnvolle Alternative.

## Aufbau

Für beide Experimente kann ein gemeinsamer Aufbau verwendet werden. Das Präparat – hier ein in Folie eingeschweißter Thorium-Glühstrumpf – wird auf einem höhenverstellbaren Podest unter dem Zählrohr platziert. So können gut verschiedene Abstände zwischen Präparat und Zählrohr eingestellt werden. Für die Absorption können Absorberplatten aus Siebdruckkarton einfach übereinander auf das Präparat gelegt werden, ohne den Abstand zum Zählrohr zu verändern.



**Abb. 1:** Einfacher Aufbau zur Untersuchung von Abstands- und Absorptionsgesetz.

## Messung und Auswertung

### Bestimmung der Nullrate<sup>1</sup> $Z_0$

Zunächst muss die sogenannte Nullrate der natürlichen Strahlung bestimmt werden. Dazu wird das Präparat möglichst weit weg abgelegt und die Zählrate 10 min lang gemessen. Bei  $N = 165$  gezählten Ereignissen ergibt sich somit eine Zählrate von  $Z_0 = 16,5 \text{ min}^{-1}$  für die Nullrate. Da angenommen werden kann, dass die Anzahl der nichtzerfallenen Kerne im Präparat deutlich größer als die Anzahl der registrierten Ereignisse ist und die Verteilung der Messereignisse diskrete Werte annimmt, kann hier zur Beschreibung des radioaktiven Zerfalls die Poisson-Verteilung herangezogen werden (siehe Anhang). Damit ergibt sich für die die Messunsicherheit beschreibende Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{N} = 12,8$  und damit letztlich für die Nullrate  $Z_0 = (16,5 \pm 1,3) \text{ min}^{-1}$ .

Diese Nullrate wird bei den weiteren Auswertungen jeweils von den Messwerten abgezogen, die Unsicherheiten werden addiert.

Mit diesem Vorgehen lernen die SuS den Umgang mit einer unvermeidbaren Messabweichung kennen.

### Nachweis des Abstandsgesetzes

Für die nächste Messung wird die Zählratenmessung über eine Minute beibehalten, weshalb die Zählrate  $Z$  gleich der Anzahl der gemessenen Ereignisse  $N$  ist. Das Präparat wird zu Beginn 10 mm unter der Zählrohröffnung positioniert. Für jede weitere Messung wird es um 10 mm abgelassen. Der Abstand  $r$  wird mit dem Tiefenmesser des Messschiebers auf 1 mm genau eingestellt. Dieser Wert wird als Messunsicherheit für den Ort verwendet.

Die Messunsicherheit der Zählrate ist in diesem Fall wieder gleich der Wurzel der gemessenen Ereignisse.

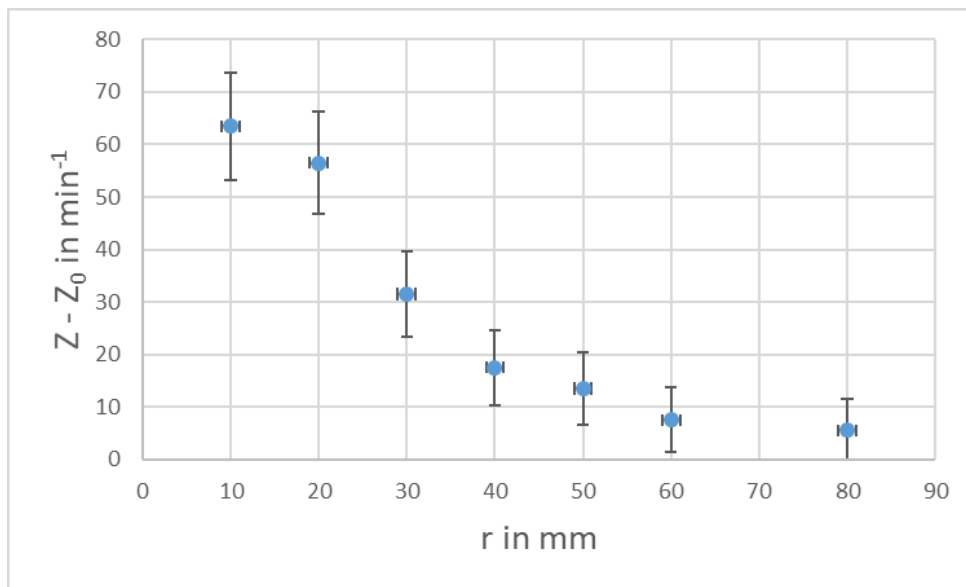
Zur Ermittlung der Messunsicherheit der Differenz von Messrate und Nullrate müssen beide Messunsicherheiten addiert werden.

$r$ in mm	$Z$ in $\text{min}^{-1}$	$Z - Z_0$ in $\text{min}^{-1}$
$10 \pm 1$	$80,0 \pm 8,9$	$63,5 \pm 10,2$
$20 \pm 1$	$73,0 \pm 8,5$	$56,5 \pm 9,8$
$30 \pm 1$	$48,0 \pm 6,9$	$31,5 \pm 8,2$
$40 \pm 1$	$34,0 \pm 5,8$	$17,5 \pm 7,1$
$50 \pm 1$	$30,0 \pm 5,5$	$13,5 \pm 6,8$
$60 \pm 1$	$24,0 \pm 4,9$	$7,5 \pm 6,2$
$80 \pm 1$	$22,0 \pm 4,7$	$5,5 \pm 6,0$

Beim letzten Wert der Tabelle ist eine Konsequenz der groben Abschätzung der Messunsicherheiten zu beobachten: die Messunsicherheit ist größer als der Wert. Ursache ist die Addition der Unsicherheiten bei kleinen Zählraten. Das gewählte Verfahren stellt so sicher, dass das angegebene Intervall die entsprechenden Werte mit hoher Sicherheit enthält.

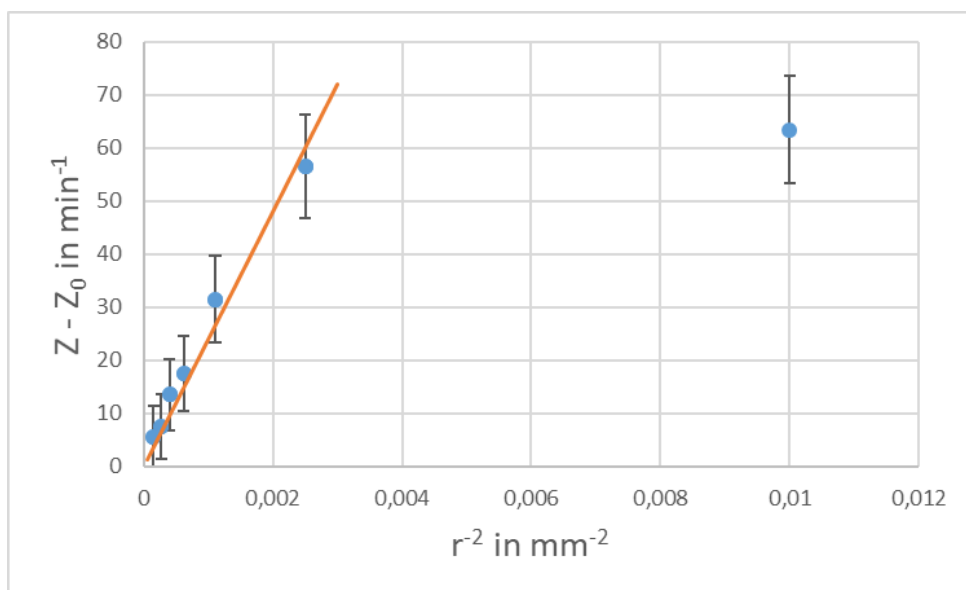
<sup>1</sup> Für die Zählrate gibt es kein einheitliches Formelsymbol. Wir haben uns hier zur leichten Lesbarkeit für  $Z$  in  $1/\text{min}$  entschieden.

Abb. 2 zeigt den abnehmenden Verlauf der Zählrate über dem Abstand  $r$ :



**Abb. 2:** Abnahme der Zählrate in Abhängigkeit des Abstands  $r$  des Präparates vom Zählrohr

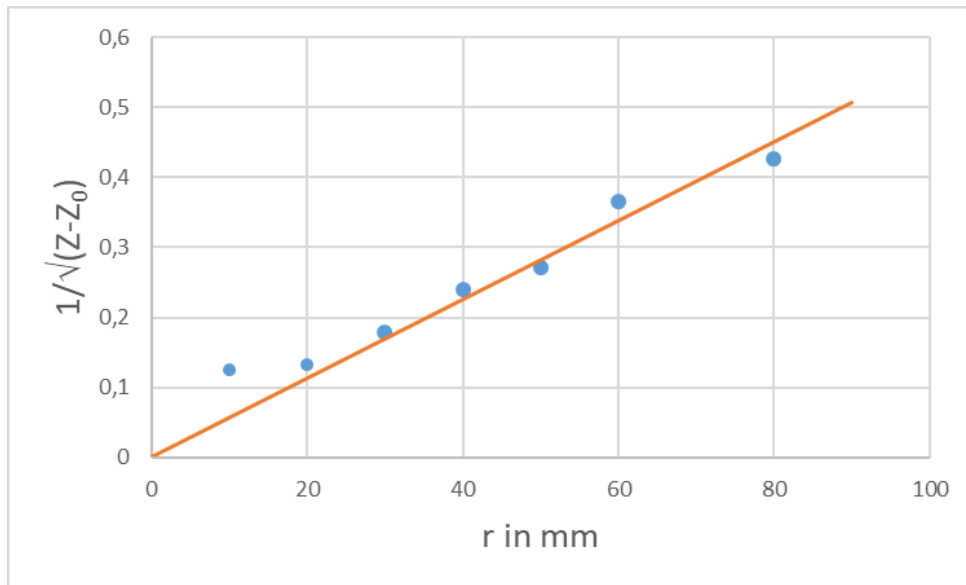
Um das Abstandsgesetz  $Z(r) \sim \frac{1}{r^2}$  zu verifizieren, wird die Zählrate auch über  $\frac{1}{r^2}$  aufgetragen (siehe Abb. 3).



**Abb. 3:** Abnahme der Zählrate in Abhängigkeit des Abstands  $r$  des Präparates vom Zählrohr. Der Abstand ist zum Überprüfen der Abstandsabhängigkeit als  $1/r^2$  aufgetragen

Bis auf den rechten Messwert, der dem geringsten Abstand (10 mm) entspricht, liegen alle Werte näherungsweise auf einer Geraden. Dass der rechte Wert weit ab und auch außerhalb der Fehlergrenzen liegt, ist durch die Ausdehnung der Quelle zu erklären. Das Abstandsgesetz setzt eine punktförmige Quelle für die radialsymmetrische Abstrahlcharakteristik voraus, die hier durch die recht große Fläche des Glühstumpfes nicht gegeben ist. Daher nähert sich die Impulsrate bei weiterer Annäherung an einen konstanten Wert an. Daher erscheint es sinnvoll, für die Auswertung zum Abstandsgesetz nur Werte ab 40 mm Abstand zu nehmen.

Neben der Auftragung von  $Z$  über  $\frac{1}{r^2}$  kann auch die Zählrate  $Z - Z_0$  auf der Hochachse in  $\frac{1}{\sqrt{Z - Z_0}}$  abgeändert und über dem Ort aufgetragen werden (siehe Abb. 4). Auf eine Umrechnung der Unsicherheiten haben wir hier verzichtet. Auch hier wird deutlich, dass kleine Werte deutlich von einer Ausgleichsgerade durch den Ursprung abweichen.



**Abb. 4:** Abnahme der Zählrate abhängig Abstand  $r$  des Präparates vom Zählrohr. Hier wurde der Abstand als Skala belassen, dafür wurde an der Hochachse die Impulsrate zu  $1/\sqrt{Z - Z_0}$  angepasst.

### Verifizierung des Absorptionsgesetzes

Die Messungen erfolgen bei festem Abstand zwischen Präparat und Zählrohr. In diesem Fall wurden 10 mm gewählt. Für diesen Abstand wurde zunächst die Anzahl der Ereignisse ohne Absorber  $N(0)$  über 10 min zu 899 bestimmt. Die Messunsicherheit bestimmt sich nach der Poisson-Verteilung zu  $\sigma = \sqrt{N} = 30$ . Als Zählrate ergibt sich daraus  $(89,9 \pm 3,0) \text{ min}^{-1}$ .

Für die weitere Auswertung zur Verifizierung des Abstandsgesetzes muss auch hier wieder die Nullrate  $Z_0 = (16,5 \pm 1,3) \text{ min}^{-1}$  abgezogen werden. Die Messunsicherheiten addieren sich dabei. Somit ergibt sich für die Zählrate ohne Absorber der Wert  $Z(0) = (73,4 \pm 4,3) \text{ min}^{-1}$ .

Dieser Wert wird in der mathematischen Modellierung als Wert bei einer Absorberdicke  $d = 0$  für die abfallende Exponentialfunktion verwendet.

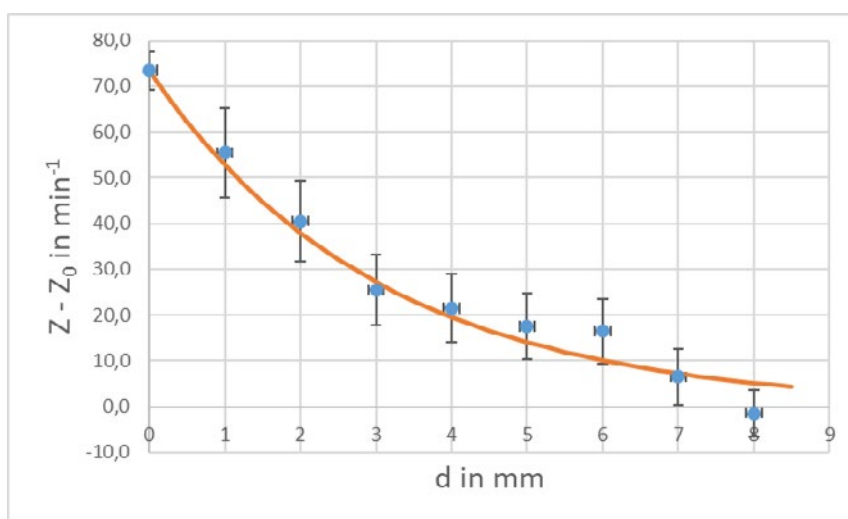
Nun erfolgt die Messung der Absorptionswerte. Dafür wird für jede weitere Messung ein weiteres Stück Siebdruckkarton oder Presspapierplatte der Dicke  $(1,0 \pm 0,1) \text{ mm}$  verwendet (siehe Abb. 5). Dieses Material kann kostengünstig erworben werden und hat für die Absorption von  $\beta$ -Strahlung einen geeigneten Absorptionskoeffizienten. Die jeweilige Absorberdicke wird jedes Mal mit einem Messschieber gemessen, weshalb die Messunsicherheit nur von der Genauigkeit des Messschiebers und unabhängig von der Absorberdicke ist.



**Abb. 5:** Absorber aus Siebdruckkarton

Absorberdicke $d$ in mm	$Z$ in 1/min	$Z - Z_0$ in 1/min
0	$88,9 \pm 3,0$	$73,4 \pm 4,3$
$1,0 \pm 0,1$	$72,0 \pm 8,5$	$55,5 \pm 9,8$
$2,0 \pm 0,1$	$57,0 \pm 7,5$	$40,5 \pm 8,8$
$3,0 \pm 0,1$	$42,0 \pm 6,5$	$25,5 \pm 7,8$
$4,0 \pm 0,1$	$38,0 \pm 6,2$	$21,5 \pm 7,5$
$5,0 \pm 0,1$	$34,0 \pm 5,8$	$17,5 \pm 7,1$
$6,0 \pm 0,1$	$33,0 \pm 5,7$	$16,5 \pm 7,0$
$7,0 \pm 0,1$	$23,0 \pm 4,8$	$6,5 \pm 6,1$
$8,0 \pm 0,1$	$15,0 \pm 3,9$	$-1,5 \pm 5,2$

In Abb. 6 sind die Messwerte mit Unsicherheiten sowie eine Anpassungsfunktion eingetragen. Die Messunsicherheiten sind bei der Absorberdicke konstant, während sie für der Zählrate aufgrund der sinkenden Zählrate abnehmen. Eine Ausnahme stellt hier die Messunsicherheit bei der Messung ohne Absorber dar, da diese wegen der hier längeren Messzeit deutlich geringer ausfällt. Für den letzten Messwert ergibt sich wegen des statistischen Zerfallsprozesses und der kurzen Messdauer durch die Nullratenkorrektur sogar ein unrealistischer negativer Wert.



**Abb. 6:** Abnahme der Zählrate abhängig von der Dicke  $d$  des Absorbers mit entsprechenden Unsicherheiten. Die farbige Linie gibt die Fitfunktion mit  $Z(0)$  und einer Halbwertsdicke von  $D_{1/2} = 2,1$  mm wieder.

An die Daten angepasst wurde die gelbe Kurve als Graph der Form  $Z(d) = Z_0 e^{-\frac{\ln(2)}{D_{1/2}} d}$ .

Für  $Z_0$  wurde hier  $73,4 \text{ min}^{-1}$  als Mittelwert ohne Absorber verwendet, die Halbwertsdicke  $D_{1/2}$  wurde manuell angepasst und zu 2,1 mm bestimmt. Somit halbiert sich bei diesem Absorber aus Karton die Zählrate alle 2,1 mm und damit immer nach etwa zwei weiteren eingebrachten Absorbern. Bei der hier verwendeten geringen Zählrate wird deutlich, dass die Messwerte ab 6 mm Absorberdicke besonders stark vom angepassten Kurvenverlauf abweichen. Hier ist die vom Präparat verursachte Zählrate schon nahe Null und damit wird die relative Unsicherheit – verursacht durch die Nullrate – sehr groß. Abhilfe schafft hier nur eine größere Aktivität des Präparates oder eine deutlich längere Messzeit. Auch ein empfindlicheres Messgerät würde helfen, da es höhere Zählraten in kürzerer Zeit erreichen würde.

## Anhang: Berechnung der Messunsicherheit für Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr

Bei Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr wird die Anzahl einzelner Ereignisse  $N$  registriert oder daraus gleich eine Zählrate  $Z$  bestimmt. Die statistischen Gesetzmäßigkeiten, denen der radioaktive Zerfall unterliegt, führen neben anderen Einflussfaktoren zu Schwankungen in der Anzahl der Ereignisse  $N$  bei wiederholenden Messungen. Daraus ergibt sich eine diskrete Verteilung der Messwerte.

Beschränkt man sich nur auf diese statistischen Schwankungen und betrachtet nicht nur einen einzelnen Kern, sondern viele Kerne, die im Zeitschritt  $\Delta t$  zerfallen können, so lässt sich das Auftreten von  $N$  registrierten Ereignissen durch eine *Binomialverteilung* beschreiben<sup>2</sup>.

Für eine große Anzahl von Kernen und deutlich weniger registrierten Ereignissen  $N$  geht die Binomialverteilung in die *Poisson-Verteilung* über (vgl. Henninger). Dann entspricht der Erwartungswert  $\mu$  für die Anzahl zerfallener Kerne der Varianz  $\sigma^2$ .

Beim radioaktiven Zerfall kann die Anzahl  $N$  der gemessenen Zerfallsereignisse als Erwartungswert genommen werden und für die die Messunsicherheit angegebende Standardabweichung ergibt sich  $\sigma = \sqrt{N}$ .

Dabei spielt es keine Rolle, ob  $N$  Ereignisse am Stück gemessen werden oder ob die Messung auf mehrere Intervalle verteilt wird.



**Hier können Sie sich das Skript als Word-Datei downloaden**

<sup>2</sup> J. Henninger, R. Schwierz: Radiometrische Messungen 1 – Geiger Müller Zählrohr, TU Dresden, Fakultät Physik, 2022,  
[https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/RM1\\_NP.pdf?lang=de](https://tu-dresden.de/mn/physik/ressourcen/dateien/studium/lehrveranstaltungen/praktika/pdf/RM1_NP.pdf?lang=de),  
abgerufen am 10.03.2024





[alp.dillingen.de](http://alp.dillingen.de)

Stand August 2024